

М.Л. КРАСНОВ  
А.И. КИСЕЛЕВ  
Г.И. МАКАРЕНКО

**ФУНКЦИИ  
КОМПЛЕКСНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО  
ОПЕРАЦИОННОЕ  
ИСЧИСЛЕНИЕ  
ТЕОРИЯ  
УСТОЙЧИВОСТИ**

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ  
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ  
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ  
И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

М. Л. КРАСНОВ  
А. И. КИСЕЛЕВ  
Г. И. МАКАРЕНКО

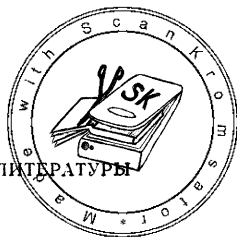
# ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРЕБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших технических учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1981



Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.  
**Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости:** Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

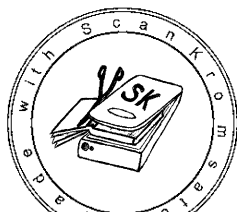
Как и другие книги, вышедшие в серии «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов», эта книга предназначена в основном для студентов технических вузов, но она может принести пользу и инженеру, желающему восстановить в памяти разделы математики, указанные в заголовке книги.

В этом издании по сравнению с предыдущим, вышедшим в 1971 г., расширены параграфы, относящиеся к гармоническим функциям, вычетам и их применениям для вычисления некоторых интегралов, конформным отображениям. Добавлены также упражнения теоретического характера.

В начале каждого параграфа приводятся необходимые теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), а также подробно разбираются типовые задачи и примеры.

В книге содержится свыше 1000 примеров и задач для самостоятельного решения. Почти все задачи снабжены ответами, а в ряде случаев даются указания к решению.

Рис. 71. Библ. 19 назв.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава I. Функции комплексного переменного . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1. Комплексные числа и действия над ними . . . . .	7
§ 2. Функции комплексного переменного . . . . .	18
§ 3. Предел последовательности комплексных чисел. Предел и непрерывность функции комплексного переменного . . . . .	25
§ 4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши—Римана . . . . .	32
§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного . . . . .	42
§ 6. Интегральная формула Коши . . . . .	50
§ 7. Ряды в комплексной области . . . . .	56
§ 8. Нули функции. Изолированные особые точки . . . . .	72
§ 9. Вычеты функций . . . . .	79
§ 10. Теорема Коши о вычетах. Приложение вычетов к вычислению определенных интегралов. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов . . . . .	85
§ 11. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше . . . . .	106
§ 12. Конформные отображения . . . . .	115
§ 13. Комплексный потенциал. Его гидродинамический смысл . . . . .	142
<b>Глава II. Операционное исчисление . . . . .</b>	<b>147</b>
§ 14. Нахождение изображений и оригиналов . . . . .	147
§ 15. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	173
§ 16. Интеграл Дюамеля . . . . .	185
§ 17. Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом . . . . .	188
§ 18. Решение интегральных уравнений Вольтерра с ядрами специального вида . . . . .	192
§ 19. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом . . . . .	198
§ 20. Решение некоторых задач математической физики . . . . .	201
§ 21. Дискретное преобразование Лапласа . . . . .	204
<b>Глава III. Теория устойчивости . . . . .</b>	<b>218</b>
§ 22. Понятие об устойчивости решения системы дифференциальных уравнений. Простейшие типы точек покоя . . . . .	218

§ 23. Второй метод Ляпунова . . . . .	225
§ 24. Исследование на устойчивость по первому приближению . . . . .	229
§ 25. Асимптотическая устойчивость в целом. Устойчивость по Лагранжу . . . . .	234
§ 26. Критерий Рауса—Гурвица . . . . .	237
§ 27. Геометрический критерий устойчивости (критерий Михайлова) . . . . .	240
§ 28. $D$ -разбиения . . . . .	243
§ 29. Устойчивость решений разностных уравнений . . . . .	250
Ответы . . . . .	259
Приложение . . . . .	300
Литература . . . . .	303

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем издании весь текст заново пересмотрен и внесены некоторые дополнения. Увеличен раздел, посвященный теории вычетов и ее приложениям (в частности, введено понятие вычета относительно бесконечно удаленной точки, применение вычетов к суммированию некоторых рядов). Увеличено число задач по применению операционного исчисления к изучению некоторых специальных функций (гамма-функции, функции Бесселя и др.), а также число задач на изображение функций, заданных графически. Существенно переработан параграф, посвященный конформным отображениям. Увеличено количество разобранных в тексте примеров. Устранены замеченные неточности и опечатки; некоторые задачи, имеющие громоздкие решения, заменены более простыми.

При подготовке второго издания книги существенную помощь своими советами и замечаниями нам оказали заведующий кафедрой математики Московского института стали и сплавов профессор В. А. Треногин и доцент этой кафедры М. И. Орлов. Считаю своим приятным долгом выразить им нашу глубокую признательность.

Мы учли замечания и пожелания кафедры прикладной математики Киевского инженерно-строительного института (заведующий кафедрой доцент А. Е. Журавель), а также замечания товарищей Б. Ткачева (г. Краснодар) и Б. Л. Цаво (г. Сухуми). Всем им мы выражаем нашу благодарность.

Мы признательны профессорам М. И. Вишику, Ф. И. Карпелевичу, А. Ф. Леонтьеву и С. И. Похожаеву за постоянное внимание и поддержку нашей работы.

Все замечания и пожелания по улучшению задачника будут приняты нами с благодарностью.

*Авторы*

**ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО**

**§ 1. Комплексные числа и действия над ними**

Комплексным числом  $z$  называется выражение вида

$$z = x + iy$$

(алгебраическая форма комплексного числа), где  $x$  и  $y$  — любые действительные числа, а  $i$  — мнимая единица, удовлетворяющая условию  $i^2 = -1$ . Числа  $x$  и  $y$  называются соответственно *действительной* и *мнимой частями комплексного числа*  $z$  и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Комплексное число  $\bar{z} = x - iy$  называется *сопряженным* комплексному числу  $z = x + iy$ .

Комплексные числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  считаются равными тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

Комплексное число  $z = x + iy$  изображается в плоскости  $XOY$  точкой  $M$  с координатами  $(x, y)$  либо вектором, начало которого находится в точке  $O(0, 0)$ , а конец

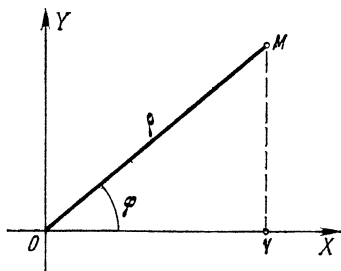


Рис. 1.

в точке  $M(x, y)$  (рис. 1). Длина  $\rho$  вектора  $\overline{OM}$  называется *модулем* комплексного числа и обозначается  $|z|$ , так что  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Угол  $\varphi$ , образованный вектором  $\overline{OM}$  с осью  $OX$ , называется *аргументом* комплексного числа  $z$  и обозначается  $\varphi = \operatorname{Arg} z$ ; он определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ :

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где  $\operatorname{arg} z$  есть главное значение  $\operatorname{Arg} z$ , определяемое условиями

$$-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi,$$

причем

$$\operatorname{arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & \text{если } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & \text{если } x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (1)$$



Имеют место следующие соотношения:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}, \quad \sin(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos(\operatorname{Arg} z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Два комплексных числа  $z_1$  и  $z_2$  равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы либо равны, либо отличаются на величину, кратную  $2\pi$ :

$$|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пусть даны два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

1. Суммой  $z_1 + z_2$  комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. Разностью  $z_1 - z_2$  комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

3. Произведением  $z_1 z_2$  комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Из определения произведения комплексных чисел, в частности, следует, что

$$z \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

4. Частным  $\frac{z_1}{z_2}$  от деления комплексного числа  $z_1$  на комплексное число  $z_2 \neq 0$  называется такое комплексное число  $z$ , которое удовлетворяет уравнению  $z z_2 = z_1$ . Для частного имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}. \quad (2)$$

При этом была использована формула  $z_2^{-1} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ .

Формулу (2) можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Действительная часть  $\operatorname{Re} z$  и мнимая часть  $\operatorname{Im} z$  комплексного числа  $z$  выражаются через сопряженные комплексные числа следующим образом:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\bar{z} + z}{2}, \quad \operatorname{Im} z = i \frac{\bar{z} - z}{2} = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Пример 1. Показать, что  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .

Доказательство. По определению имеем

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

1. Доказать следующие соотношения:

а)  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ ; б)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ; в)  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ; г)  $\overline{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = z_1 + z_2$ .

Пример 2. Найти действительные решения уравнения

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i.$$

Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:  $(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i$ . Отсюда согласно определению равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$x = 2, \quad y = 1.$$

Найти действительные решения уравнений:

2.  $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$ .

3.  $(x - iy)(a - ib) = i^5$ , где  $a, b$  — заданные действительные числа,  $|a| \neq |b|$ .

4.  $\frac{1}{z - i} + \frac{2 + i}{1 + i} = \sqrt{2}$ , где  $z = x + iy$ .

5. Представить комплексное число  $\frac{1}{(a + ib)^2} + \frac{1}{(a - ib)^2}$  в алгебраической форме.

6. Доказать, что  $\frac{\sqrt{1 + x^2} + ix}{x - i\sqrt{1 + x^2}} = i$  ( $x$  — действительное).

7. Выразить  $x$  и  $y$  через  $u$  и  $v$ , если  $\frac{1}{x + iy} + \frac{1}{u + iv} = 1$  ( $x, y, u, v$  — действительные числа).

8. Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию  $\bar{z} = z^2$ .

Пример 3. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$z = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}.$$

Решение. Имеем

$$x = -\sin \frac{\pi}{8} < 0, \quad y = -\cos \frac{\pi}{8} < 0.$$

Главным значением аргумента согласно (1) будет

$$\begin{aligned} \arg z &= -\pi + \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \right) = -\pi + \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right] = \\ &= -\pi + \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{3}{8} \pi \right) = -\pi + \frac{3}{8} \pi = -\frac{5}{8} \pi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{5}{8}\pi + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$|z| = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8}} = 1.$$

9. В следующих задачах найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел:

а)  $z = 4 + 3i$ ;      б)  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ ;

в)  $z = -7 - i$ ;      г)  $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ ;

д)  $z = 4 - 3i$ ;      е)  $z = \cos \alpha - i \sin \alpha$

$$\left(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi\right).$$

Любое комплексное число  $z = x + iy$  ( $z \neq 0$ ) можно записать в тригонометрической форме

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \text{где } \rho = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное число

$$z = -1 - i\sqrt{3}.$$

Решение. Имеем

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}, \quad \varphi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Следовательно,

$$-1 - i\sqrt{3} = 2 \left[ \cos \left( -\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left( -\frac{2}{3}\pi \right) \right].$$

Пример 5. Найти действительные корни уравнения

$$\cos x + i \sin x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i.$$

Решение. Данное уравнение корней не имеет. В самом деле, это уравнение равносильно следующим:  $\cos x = 1/2$ ,  $\sin x = 3/4$ . Последние уравнения несовместны, так как  $\cos^2 x + \sin^2 x = 13/16$ , что невозможно ни при каких значениях  $x$ .

Любое комплексное число  $z \neq 0$  можно записать в показательной форме

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \text{где } \rho = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Пример 6. Найти все комплексные числа  $z \neq 0$ , удовлетворяющие условию  $z^{n-1} = \bar{z}$ .

Решение. Пусть  $z = \rho e^{i\varphi}$ . Тогда  $\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$ .

Согласно условию

$$\rho^{n-1} e^{i(n-1)\varphi} = \rho e^{-i\varphi} \quad \text{или} \quad \rho^{n-2} e^{in\varphi} = 1,$$

откуда  $\rho^{n-2}=1$ , т. е.  $\rho=1$ , и  $in\varphi=2k\pi i$ , т. е.  $\varphi=\frac{2k\pi}{n}$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ). Следовательно,

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

10. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической форме:

а)  $-2$ ; б)  $2i$ ; в)  $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ;

г)  $1 - \sin \alpha + i \cos \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ );

д)  $\frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ );

в показательной форме:

е)  $-2$ ; ж)  $i$ ; з)  $-i$ ; и)  $-1 - i\sqrt{3}$ ;

к)  $\sin \alpha - i \cos \alpha$  ( $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ); л)  $5 + 3i$ .

Пусть комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$  даны в тригонометрической форме  $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ .

Их произведение находится по формуле

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$\text{Arg } (z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Частное двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2 \neq 0$  находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)],$$

т. е.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Возведение комплексного числа

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

в натуральную степень  $n$  производится по формуле

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

т. е.

$$|z^n| = |z|^n, \quad \text{Arg } z^n = n \text{Arg } z + 2\pi k \quad (k=0, \pm 1, \dots).$$

Отсюда получается формула Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Свойства модуля комплексных чисел

1.  $|\bar{z}| = |z|$ ;                      2.  $z\bar{z} = |z|^2$ ;
3.  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ;        4.  $|z^n| = |z|^n$ ;
5.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $z_2 \neq 0$ ;
6.  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ ,  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ;
7.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;
8.  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ .

Пример 7. Вычислить  $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$ .

Решение. Представим число  $z = -1 + i\sqrt{3}$  в тригонометрической форме

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right).$$

Применяя приведенную выше формулу возведения в степень, получим

$$\begin{aligned} (-1 + i\sqrt{3})^{60} &= 2^{60} \left[ \cos \left( 60 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) + i \sin \left( 60 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) \right] = \\ &= 2^{60} (\cos 40\pi + i \sin 40\pi) = 2^{60}. \end{aligned}$$

Пример 8. Доказать, что многочлен

$$f(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - x \sin n\alpha$$

делится на  $x^2 + 1$ .

Решение. Имеем  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ . По формуле Муавра

$$\begin{aligned} f(i) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - i \sin n\alpha = \\ &= \cos n\alpha + i \sin n\alpha - \cos n\alpha - i \sin n\alpha = 0. \end{aligned}$$

Аналогично  $f(-i) = 0$ . Значит,  $f(x)$  делится на  $x^2 + 1$ .

11. Доказать, что многочлен

$$f(x) = x^n \sin \alpha - \lambda^{n-1} x \sin n\alpha + \lambda^n \sin (n-1)\alpha$$

делится на  $x^2 - 2\lambda x \cos \alpha + \lambda^2$ .

12. Вычислить:

а)  $\left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{40}$ ; б)  $(2-2i)^2$ ; в)  $(\sqrt{3}-3i)^6$ ; г)  $\left( \frac{1-i}{1+i} \right)^8$ .

13. Доказать, что

$$\left( \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n\alpha}{1-i \operatorname{tg} n\alpha}.$$

14. Доказать, что если

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = 1, \quad \text{то} \quad (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n = 1.$$

15. Пользуясь формулой Муавра, выразить через степени  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  следующие функции кратных углов:  
 а)  $\sin 3\varphi$ ; б)  $\cos 3\varphi$ ; в)  $\sin 4\varphi$ ; г)  $\cos 4\varphi$ ; д)  $\sin 5\varphi$ ;  
 е)  $\cos 5\varphi$ .

Корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$  имеет  $n$  различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

где  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\varphi = \arg z$ .

Точки, соответствующие значениям  $\sqrt[n]{z}$ , являются вершинами правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $R = \sqrt[n]{|z|}$  с центром в начале координат.

Корень  $n$ -й степени из действительного числа  $a$  также имеет  $n$  различных значений; среди этих значений действительных будет два, одно или ни одного в зависимости от четности или нечетности  $n$  и знака числа  $a$ .

Пример 9. Найти все значения  $\sqrt[4]{1-i}$ .

Решение. Приводим комплексное число  $1-i$  к тригонометрическому виду

$$1-i = \sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right).$$

Полагая  $k=0, 1, 2, 3$ , найдем

$$(k=0) \quad \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{16} - i \sin \frac{\pi}{16} \right),$$

$$(k=1) \quad \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{7}{16}\pi + i \sin \frac{7}{16}\pi \right),$$

$$(k=2) \quad \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{15}{16}\pi + i \sin \frac{15}{16}\pi \right),$$

$$(k=3) \quad \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{23}{16}\pi + i \sin \frac{23}{16}\pi \right).$$

В следующих задачах найти все значения корня:

16. а)  $\sqrt[4]{-1}$ ; б)  $\sqrt{i}$ ; в)  $\sqrt[3]{i}$ ; г)  $\sqrt[4]{-i}$ .

17. а)  $\sqrt[4]{1}$ ; б)  $\sqrt[3]{-1+i}$ ; в)  $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$ .

18.  $\sqrt[5]{\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}$ .

**Пример 10.** Какое множество точек на плоскости комплексного переменного  $z$  определяется условием

$$\operatorname{Im} z^2 > 2?$$

**Решение.** Пусть  $z = x + iy$ . Тогда

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Следовательно,  $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$ .

По условию  $2xy > 2$  или  $xy > 1$ . Это неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах, соответственно над и под гиперболой  $xy = 1$ .

**Пример 11.** Какое множество точек на комплексной плоскости определяется условием

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{3}{4}\pi?$$

**Решение.** Комплексное число

$$z + 1 - i = z - (-1 + i)$$

изображается вектором, началом которого является точка  $-1 + i$ , а концом — точка  $z$ . Угол между этим вектором и осью  $OX$  есть  $\arg(z + 1 - i)$ , и он меняется в пределах от  $-\frac{\pi}{2}$  до

$\frac{3}{4}\pi$ . Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки  $-1 + i$  и образующими с осью  $OX$  углы в  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3}{4}\pi$  радианов (рис. 2).

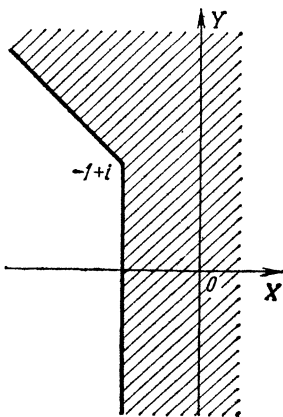


Рис. 2.

**Пример 12.** Какая область определяется условием  $|z| + \operatorname{Re} z < 1$ ?

**Решение.** Пусть  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда  $|z| = \rho$ ,  $\operatorname{Re} z = \rho \cos \varphi$ . По условию  $\rho + \rho \cos \varphi < 1$ , откуда

$$\rho < \frac{1}{1 + \cos \varphi}.$$

Этому условию удовлетворяют все точки, лежащие в области, ограниченной кривой

$$\rho = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$$

(уравнение параболы в полярных координатах).

В следующих задачах найти множества точек на плоскости комплексного переменного  $z$ , которые определяются заданными условиями:

19. а)  $|z| \geq 2$ ; б)  $\frac{1}{|z|} \geq 1$ ,  $z \neq 0$ ; в)  $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 2$ ,  $z \neq 0$ .

20. а)  $|z - 5i| = 8$ ; б)  $|z - 1 - i| \leq 4$ .

21. а)  $1 < |z + i| < 2$ ,  $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ; б)  $2 < |z| < 3$ ,  $\frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{4}{3}\pi$ .

22. а)  $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$ ; б)  $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$ .

23. а)  $1 \leq |z + 2 + i| \leq 2$ ; б)  $|z - 1| < |z - i|$ ; в)  $1 < \operatorname{Re} z < 2$ .

24.  $|z - a| < |1 - a\bar{z}|$  ( $a$  — действительное,  $|a| < 1$ ).

25. а)  $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$ ; б)  $|z| - \operatorname{Re} z \leq 0$ .

26.  $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1$ .

27.  $4 \leq |z - 1| + |z + 1| \leq 8$ .

28. а)  $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < -\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$ .

Пример 13. Какая кривая задается уравнением  $|z + c| + |z - c| = 2a$ , где  $c$  и  $a$  — действительные положительные числа, причем  $a > c$ ?

Решение.  $|z + c|$  — расстояние между точками  $z$  и  $-c$ ;  $|z - c|$  — расстояние между точками  $z$  и  $c$ . По условию сумма расстояний от точки  $z$  до двух данных точек  $z_1 = -c$  и  $z_2 = c$  есть величина постоянная. Значит, точка  $z$  лежит на эллипсе. Уравнение этого эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Пример 14. Какая кривая определяется уравнением  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$ ?

Решение. Пусть  $z = x + iy$ . Имеем

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

По условию

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

Это окружность  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ .



29. Какую линию образует множество всех точек  $z = -2 + iy$ , если  $y$  принимает любые действительные значения?

30. Какую линию образует множество всех точек  $z = x + 2i$ , если  $x$  принимает любые действительные значения?

Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:

31. а)  $\operatorname{Im} z^2 = 2$ ; б)  $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$ ; в)  $\operatorname{Im} \left( \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2}$ .

32. а)  $\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) = 1$ ; б)  $\operatorname{Im} (\overline{z^2 - \bar{z}}) = 2 - \operatorname{Im} z$ .

33.  $z^2 + \bar{z}^2 = 1$ .

34.  $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$ .

35. а)  $|z - i| + |z + i| = 4$ ; б)  $|z - i| - |z + i| = 2$ .

36. а)  $|z| - 3 \operatorname{Im} z = 6$ ; б)  $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$ .

37. а)  $|z - 2| = |1 - 2z|$ ; б)  $|z - z_1| = |z - z_2|$ ;  
в)  $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0$ ; г)  $\operatorname{Re}(1 + z) = |z|$ .

Пример 15. Написать в комплексной форме уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \quad (3)$$

Решение. Пусть  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ . Тогда  $x = \frac{\bar{z} + z}{2}$ ,  
 $y = \frac{\bar{z} - z}{2}i$ . Подставляя в уравнение (3) выражения для  $x$  и  $y$ , получим

$$A(\bar{z} + z) + Bi(\bar{z} - z) + 2C = 0$$

или

$$(A + iB)\bar{z} + (A - iB)z + 2C = 0. \quad (4)$$

Введем обозначение

$$A + iB = a.$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\bar{a}z + a\bar{z} + 2C = 0.$$

Пример 16. Написать в комплексной форме уравнение окружности

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0. \quad (5)$$

Решение. Имеем

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}, \quad 2x = \bar{z} + z, \quad 2y = i(\bar{z} - z).$$

Подставляя в уравнение (5), получим

$$z\bar{z} + \bar{z} + z + i(\bar{z} - z) = 0$$

или

$$z\bar{z} + (1-i)z + (1+i)\bar{z} = 0.$$

Пример 17. Какая линия на плоскости  $XOY$  определяется уравнением

$$z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0? \quad (6)$$

Решение. Пусть  $z = x + iy$ .

Имеем  $\bar{z} = x - iy$ ,  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ .

Уравнение (6) примет вид

$$x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0$$

или

$$x^2 + (y-1)^2 = 3.$$

Это — окружность радиуса  $R = \sqrt{3}$  с центром в точке  $(0, 1)$ .

Написать в комплексной форме уравнения следующих линий:

38. а) Координатных осей  $OX$  и  $OY$ ; б) прямой  $y = x$ ; в) прямой  $y = kx + b$ , где  $k, b$  — действительные.

39. а) Равнобочной гиперболы  $x^2 - y^2 = a^2$ ; б) окружности  $x^2 + y^2 + 2x = 0$ .

### Разные задачи

Решить уравнения:

40.  $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$ .

41.  $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$ .

42. Найти комплексное число  $z$ , изображением которого является точка отрезка  $z_1z_2$ , отстоящая от  $z_2$  вдвое дальше, чем от  $z_1$ .

43. В какой вектор перейдет вектор  $a + ib$  при зеркальном отображении его в биссектрисе первой четверти?

44. В какой вектор перейдет вектор  $-\sqrt{3} + 3i$  после поворота на угол  $90^\circ$ ?

45. В какой вектор перейдет вектор  $-\sqrt{3} - i$  после поворота на угол  $120^\circ$ ?

46. Найти угол, на который надо повернуть вектор  $4 - 3i$ , чтобы получить вектор  $-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$ .

47. Найти угол, на который надо повернуть вектор  $3\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ , чтобы получить вектор  $-5 + i$ .

Решить уравнения:

48.  $(x+i)^n - (x-i)^n = 0$  ( $x$  — действительное).

49.  $\cos x + i \sin x = \sin x + i \cos x$ .

50. Найти вектор, в который перейдет после поворота на  $45^\circ$  и удвоения вектор  $z = 3 + 4i$ .

51. Центр квадрата находится в точке  $z_0 = 1 + i$ , а одна из вершин — в точке  $z_1 = 1 - i$ . В каких точках находятся остальные вершины квадрата?

52. Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — корни уравнения  $z^n - 1 = 0$  ( $n > 1$ ).

Доказать, что  $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$ .

Найти следующие суммы:

53. а)  $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ ;

б)  $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ .

54. а)  $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin (2n-1)x$ ;

б)  $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x$ .

## § 2. Функции комплексного переменного

Говорят, что в области  $D$  определена функция  $w = f(z)$ , если каждой точке  $z \in D$  поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений  $w$ .

Таким образом, функция  $w = f(z)$  осуществляет отображение точек комплексной плоскости  $z$  на соответствующие точки комплексной плоскости  $w$ .

Пусть  $z = x + iy$  и  $w = u + iv$ . Тогда зависимость  $w = f(z)$  между комплексной функцией  $w$  и комплексной переменной  $z$  может быть описана с помощью двух действительных функций  $u$  и  $v$  действительных переменных  $x$  и  $y$

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Пример 1. Пусть  $w = z^3 - i\bar{z}$ .

Полагая  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , получим

$$u + iv = (x + iy)^3 - i(x - iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 - x).$$

Следовательно, равенство  $w = z^3 - i\bar{z}$  равносильно двум равенствам

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 - y, \\ v = 3x^2y - x - y^3. \end{cases}$$

Для следующих функций найти действительную и мнимые части:

55. а)  $w = \bar{z} - iz^2$ ; б)  $w = z^2 + i$ ; в)  $w = i - z^3$ ; г)  $w = \frac{1}{\bar{z}}$ ; д)  $w = \frac{iz+1}{1+\bar{z}}$ ; е)  $w = \frac{\bar{z}}{z}$ .

В следующих задачах найти образы данных точек при указанных отображениях:

56. а)  $z_0 = -i$ ;  $\omega = z^2$ ; б)  $z_0 = 1 - i$ ,  $\omega = (z - i)^2$ ;  
 в)  $z_0 = 1$ ,  $\omega = \frac{1}{z - i}$ ; г)  $z_0 = 2 + 3i$ ,  $\omega = \frac{z}{z}$ .

Пусть в плоскости  $z$  кривая задана уравнением  $F(x, y) = 0$ . Чтобы найти уравнение образа  $\Phi(u, v) = 0$  этой кривой в плоскости  $\omega$  при отображении с помощью функции  $\omega = f(z) = u + iv$ , нужно исключить  $x$  и  $y$  из уравнений

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t) \end{array} \right\} \text{ или } z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

то параметрические уравнения ее образа при отображении  $\omega = f(z) = u + iv$  будут

$$\left. \begin{array}{l} u = u[x(t), y(t)] = U(t), \\ v = v[x(t), y(t)] = V(t). \end{array} \right\}$$

**Пример 2.** В какую кривую отображается единичная окружность  $|z| = 1$  с помощью функции  $\omega = z^2$ ?

**Решение.** Так как по условию  $|z| = 1$ , то

$$|\omega| = |z|^2 = 1.$$

Итак, образом окружности  $|z| = 1$  в плоскости  $z$  является окружность  $|\omega| = 1$  в плоскости  $\omega$ , проходимая дважды. Это следует из того, что поскольку  $\omega = z^2$ , то  $\text{Arg } \omega = 2 \text{Arg } z + 2k\pi$ , так что когда точка  $z$  описывает полную окружность  $|z| = 1$ , то ее образ описывает окружность  $|\omega| = 1$  дважды.

**Пример 3.** Найти образ окружности

$$z = R \cos t + iR \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

при отображении  $\omega = \frac{z}{\bar{z}}$ .

**Решение.** Пусть  $z = x + iy$ . Данное уравнение окружности можно записать в виде

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

Отделим действительную и мнимую части функции  $\omega = u + iv$ . Имеем

$$u + iv = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{z\bar{z}} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Подставляя  $x = R \cos t$  и  $y = R \sin t$  в  $u$  и  $v$ , получим параметрические уравнения образа окружности

$$\begin{cases} u = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos 2t, \\ v = \frac{2 \cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sin 2t, \end{cases} \quad (*)$$

или  $u^2 + v^2 = 1$ .

Итак, образ есть единичная окружность, проходимая дважды, что следует из того, что  $0 \leq t < 2\pi$ , и из формул (\*).

57. Установить, на какие линии плоскости  $w$  отображаются с помощью функции  $w = \frac{1}{z}$  следующие линии плоскости  $z$ :

- а)  $|z| = \frac{1}{2}$ ; б)  $\operatorname{Re} z = 0$ ; в)  $\arg z = \frac{3}{4} \pi$ ; г)  $\arg z^2 = -\frac{\pi}{2}$ ;  
 д)  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ ; е)  $|\bar{z}| = z$ .

58. Найти образы координатных осей  $OX$  и  $OY$  при следующих отображениях:

- а)  $w = \frac{z+1}{z-1}$ ; б)  $w = 1 + \frac{1}{z}$ .

Основные элементарные функции комплексного переменного

### 1. Дробно-рациональная функция

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m};$$

в частности, рациональной функцией является многочлен

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

2. Показательная функция  $e^z$  определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Показательная функция  $e^z$  обладает следующими свойствами:

- а)  $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ , где  $z_1$  и  $z_2$  — любые комплексные величины;  
 б)  $e^{z + 2k\pi i} = e^z$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), т. е.  $e^z$  является периодической функцией с периодом  $2\pi i$ .

3. Тригонометрические функции  $\sin z$  и  $\cos z$  определяются степенными рядами:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

абсолютно сходящимися при любом комплексном значении  $z$ . Функции  $\sin z$  и  $\cos z$  — периодические с действительным периодом  $2\pi$  и имеют только действительные нули  $z = k\pi$  и  $z = \pi/2 + k\pi$  соответственно, где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Для функций  $e^z$ ,  $\sin z$  и  $\cos z$  имеют место формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad (1)$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (2)$$

Функции  $\operatorname{tg} z$  и  $\operatorname{ctg} z$  определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (3)$$

Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. Гиперболические функции  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{th} z$ ,  $\operatorname{cth} z$  определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \quad (5)$$

5. Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz,$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \quad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz,$$

$$\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

6. Логарифмическая функция  $\operatorname{Ln} z$ , где  $z \neq 0$ , определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i \quad (6)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Эта функция является многозначной. Главным значением  $\operatorname{Ln} z$  называется то значение, которое получается при  $k = 0$ ; оно обозначается  $\ln z$ :

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

7. Обратные тригонометрические функции  $\text{Arcsin } z$ ,  $\text{Arccos } z$ ,  $\text{Arctg } z$ ,  $\text{Arcctg } z$  определяются как функции, обратные соответственно к функциям  $\sin \omega$ ,  $\cos \omega$ ,  $\text{tg } \omega$ ,  $\text{ctg } \omega$ .

Например, если  $z = \sin \omega$ , то  $\omega$  называется арксинусом числа  $z$  и обозначается  $\omega = \text{Arcsin } z$ .

Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции

$$\text{Arcsin } z = -i \text{Ln} (iz + \sqrt{1-z^2}); \quad (7)$$

$$\text{Arccos } z = -i \text{Ln} (z + \sqrt{z^2-1}); \quad (8)$$

$$\text{Arctg } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}; \quad (9)$$

$$\text{Arcctg } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{z+i}{z-i}. \quad (10)$$

Главные значения обратных тригонометрических функций  $\text{arcsin } z$ ,  $\text{arccos } z$ ,  $\text{arctg } z$ ,  $\text{arcctg } z$  получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

8. Общая степенная функция  $w = z^a$ , где  $a = \alpha + i\beta$  — любое комплексное число, определяется равенством

$$z^a = e^{a \text{Ln } z}.$$

Эта функция, вообще говоря, многозначная; ее главное значение равно

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

9. Общая показательная функция  $w = a^z$  ( $a \neq 0$  — любое комплексное число) определяется равенством

$$a^z = e^{z \text{Ln } a}.$$

Главное значение этой многозначной функции  $a^z = e^{z \ln a}$ .

Выделить действительную и мнимую части у следующих функций:

59. а)  $w = 2z - 1$ ; б)  $w = z + z^2$ ; в)  $w = z^{-1}$ .

60. а)  $w = e^{-z}$ ; б)  $w = e^{z^2}$ ; в)  $w = \sin z$ ; г)  $w = \text{ch}(z - i)$ .

61. а)  $w = 2^{z^2}$ ; б)  $w = \text{sh } z$ ; в)  $w = \text{tg } z$ .

Пример 4. Найти значение модуля функции  $w = \sin z$  в точке

$$z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Решение. Пусть  $z = x + iy$ . Тогда

$$w = \sin x \text{ch } y + i \text{sh } y \cos x.$$

Модуль функции  $\sin z$  равен

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \text{ch}^2 y + \text{sh}^2 y \cos^2 x} = \\ &= \sqrt{\sin^2 x \text{ch}^2 y + \text{sh}^2 y (1 - \sin^2 x)} = \sqrt{\sin^2 x + \text{sh}^2 y}. \end{aligned}$$

Полагая  $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$ , найдем

$$\begin{aligned} |\sin[\pi + i \ln(2 + \sqrt{5})]| &= \operatorname{sh}[\ln(2 + \sqrt{5})] = \\ &= \frac{e^{\ln(2 + \sqrt{5})} - e^{-\ln(2 + \sqrt{5})}}{2} = \frac{2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}}}{2} = 2. \end{aligned}$$

Этот пример показывает, что тригонометрическая функция  $\sin z$  в комплексной области может принимать значения, по модулю большие единицы.

В следующих задачах найти значение модуля и главное значение аргумента данных функций в указанных точках:

62.  $\omega = \cos z$ , а)  $z_1 = \frac{\pi}{2} + i \ln 2$ ; б)  $z_2 = \pi + i \ln 2$ .

63.  $\omega = \operatorname{sh} z$ ,  $z_0 = 1 + i \frac{\pi}{2}$ .

64.  $\omega = ze^z$ ,  $z_0 = \pi i$ .

65.  $\omega = \operatorname{ch}^2 z$ ,  $z_0 = i \ln 3$ .

66. Найти логарифмы следующих чисел:

а)  $e$ ; б)  $-i$ ; в)  $i$ ; г)  $-1 - i$ ; д)  $3 - 2i$ ; е)  $i^i$ .

67. Найти:

а)  $i^i$ ; б)  $i^{\frac{1}{i}}$ ; в)  $1^i$ ; г)  $(-1)^{i\sqrt{2}}$ ; д)  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$ ; е)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$ ;

ж)  $(1-i)^{3-3i}$ .

68. Найти модуль  $\rho$  и аргумент  $\varphi$  комплексных чисел: а)  $\operatorname{th} \pi i$ ; б)  $10^i$ ; в)  $3^{2-i}$ .

Пример 5. Записать в алгебраической форме  $\operatorname{Arcsin} \frac{\pi}{3} i$ .

Решение. Полагая в формуле (7)  $z = \frac{\pi}{3} i$ , получим

$$\operatorname{Arcsin} \frac{\pi}{3} i = -i \operatorname{Ln} \left( -\frac{\pi}{3} \pm \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} \frac{\pi}{3} i &= -i \operatorname{Ln} \left[ -\left( \frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right) \right] = \\ &= -i \left[ \ln \left( \frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right) + \pi i + 2k\pi i \right] = \\ &= (2k+1)\pi - i \ln \left( \frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$



и

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} \frac{\pi}{3} i &= \\ &= -i \operatorname{Ln} \left( \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} - \frac{\pi}{3} \right) = -i \left[ \ln \left( \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi i \right] = \\ &= 2k\pi - i \ln \left( \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} - \frac{\pi}{3} \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

**Пример 6.** Записать в алгебраической форме  $\operatorname{Arctg}(1+i)$ .

**Решение.** Полагая в формуле (9)  $z=1+i$ , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg}(1+i) &= \\ &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i}{2-i} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left( -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right). \end{aligned}$$

Далее

$$\operatorname{Ln} \left( -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right) = -\ln \sqrt{5} + (2k+1)\pi i - i \operatorname{arctg} 2.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg}(1+i) &= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + (2k+1) \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \ln \sqrt{5} \\ &\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

69. а)  $e^{\frac{\pi}{4}i}$ ; б)  $\ln(1-i)$ .

70. а)  $\sin \pi i$ ; б)  $\cos \pi i$ ; в)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} i$ .

71. а)  $\operatorname{ctg} \pi i$ ; б)  $\operatorname{Arcsin} i$ ; в)  $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3}$ .

72. а)  $\operatorname{Arccos} i$ ; б)  $\operatorname{sh} \frac{\pi i}{2}$ ; в)  $\operatorname{th} \pi i$ .

**Пример 7.** Решить уравнение  $\sin z=3$ .

**Решение.** Задача сводится к нахождению величины

$$z = \operatorname{Arcsin} 3$$

Воспользуемся формулой (7):

$$\operatorname{Arcsin} t = -i \operatorname{Ln} (it + \sqrt{1-t^2}).$$

Будем иметь

$$z = \operatorname{Arcsin} 3 = -i \operatorname{Ln} (3i + \sqrt{-8})$$

или, учитывая то, что

$$\sqrt{-8} = \pm \sqrt{8} i,$$

получим

$$z = -i [\operatorname{Ln} (3 + \sqrt{8}) i],$$

$$z = -i [\operatorname{Ln} (3 - \sqrt{8}) i].$$

Так как

$$\arg [(3 + \sqrt{8}) i] = \arg [(3 - \sqrt{8}) i] = \frac{\pi}{2},$$

$$|(3 + \sqrt{8}) i| = 3 + \sqrt{8}, \quad |(3 - \sqrt{8}) i| = 3 - \sqrt{8},$$

то

$$\operatorname{Ln} [(3 \pm \sqrt{8}) i] = \ln (3 \pm \sqrt{8}) + \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i,$$

где  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Следовательно,

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln (3 \pm \sqrt{8}) \quad (k=0; \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Решить следующие уравнения:

73.  $e^{-z} + 1 = 0$ . 74.  $e^z + i = 0$ .

75.  $4 \cos z + 5 = 0$ . 76.  $\operatorname{sh} iz = -i$ .

77.  $\sin z = \pi i$ . 78.  $e^{ix} = \cos \pi x$  ( $x$  — действительное).

79.  $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$ . 80.  $\operatorname{ch} z = i$ .

81. а)  $\ln(z + i) = 0$ ; б)  $\ln(i - z) = 1$ .

### § 3. Предел последовательности комплексных чисел. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

1. Пусть дана последовательность  $\{z_n\}$  комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

Определение 1. Комплексное число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{z_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать такой номер  $N = N(\varepsilon)$ , начиная с которого все элементы  $z_n$  этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|z_n - a| < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N(\varepsilon).$$

Последовательность  $\{z_n\}$ , имеющая предел  $a$ , называется *сходящейся к числу  $a$* , что записывается в виде  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

Каждой последовательности комплексных чисел  $\{z_n\}$  соответствуют две последовательности действительных чисел  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , где  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Последовательность  $\{z_n = x_n + iy_n\}$  сходится к числу  $a = \alpha + i\beta$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

Определение 2. Последовательность  $\{z_n\}$  называется *ограниченной*, если существует положительное число  $M$  такое, что для всех элементов  $z_n$  этой последовательности выполняется неравенство  $|z_n| \leq M$ .

Теорема 2. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена,*

Свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = b$ , то

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm \tau_n) = a \pm b;$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \tau_n) = ab;$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\tau_n} = \frac{a}{b} \quad (\tau_n \neq 0, b \neq 0).$$

Пример 1. Доказать, что последовательность

$$z_n = \frac{n-i}{n+1}, \quad n=1, 2, \dots,$$

имеет пределом число  $a=1$ .

Решение. Пусть задано произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Покажем, что существует такой номер  $N$ , что  $|z_n - 1| < \varepsilon$ , как только  $n \geq N$ . Так как

$$|z_n - 1| = \left| \frac{n-i}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{1+i}{n+1} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1},$$

то неравенство  $|z_n - 1| < \varepsilon$  будет выполнено, если  $\frac{\sqrt{2}}{n+1} < \varepsilon$ , т. е.

при  $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$ . Значит, в качестве  $N$  можно взять

$$N = N(\varepsilon) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1 \right] + 1.$$

Здесь символ  $[x]$  означает целую часть действительного числа  $x$ .

Пример 2. Пусть последовательность  $\{z_n\}$  имеет предел  $a$ . Доказать, что последовательность  $\{|z_n|\}$  имеет предел, равный  $|a|$ .

В самом деле, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0. \quad (1)$$

С другой стороны, для любых двух комплексных чисел  $z_n$  и  $a$  имеет место неравенство (см. стр. 12)

$$||z_n| - |a|| \leq |z_n - a|. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |a|$ .

Достаточное условие сходимости  
последовательности комплексных чисел

Пусть  $z_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$ , где  $\rho_n = |z_n|$ ,  $\varphi_n = \arg z_n$ . Тогда, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ .

Пример 3. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z, \text{ где } z = x + iy.$$

Доказательство. Обозначим

$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2} \right]^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2 + y^2 + 2xn}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^x. \end{aligned}$$

Так как

$$\varphi_n = \arg \left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x},$$

то

$$\arg z_n = \arg \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = n \arg \left(1 + \frac{z}{n}\right) = n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x}.$$

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x} = y.$$

Пользуясь достаточным условием сходимости последовательности комплексных чисел, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z,$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать, что последовательность

$$z_n = \arg \frac{(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

расходится.

Доказательство. Так как

$$z_n = \arg \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ \pi & \text{при } n \text{ нечетном,} \end{cases}$$

то последовательность  $\{z_n\}$  имеет вид  $\pi, 0, \pi, 0, \dots$  и предела не имеет.

**Пример 5.** Пусть

$$x_n = 1 + \rho \cos \alpha + \rho^2 \cos 2\alpha + \dots + \rho^n \cos n\alpha,$$

где  $0 < \rho < 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Решение.** Положим

$$y_n = \rho \sin \alpha + \rho^2 \sin 2\alpha + \dots + \rho^n \sin n\alpha$$

и рассмотрим предел последовательности комплексных чисел

$$z_n = x_n + iy_n = 1 + \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) + \rho^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \dots + \rho^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Положим

$$t = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad |t| = \rho < 1.$$

Пользуясь формулой Муавра и формулой суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$z_n = 1 + t + t^2 + \dots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t},$$

и так как  $|t| < 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{1 - t}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \operatorname{Re} \frac{1}{1 - t} = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \\ &= \frac{1 - \rho \cos \alpha}{(1 - \rho \cos \alpha)^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \rho \cos \alpha}{1 - 2\rho \cos \alpha + \rho^2}. \end{aligned}$$

Пусть имеем последовательность  $\{z_n\}$  комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

Если для любого сколь угодно большого числа  $M > 0$  существует натуральное число  $N$  такое, что все члены  $z_n$  последовательности с номерами  $n > N$  удовлетворяют неравенству  $|z_n| > M$ , то говорят, что последовательность  $\{z_n\}$  *сходится к бесконечно удаленной точке* или, просто, к бесконечности, и пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

Пополняя плоскость комплексного переменного так введенной бесконечно удаленной точкой  $z = \infty$ , получаем расширенную плоскость комплексного переменного.

*Окрестностью бесконечно удаленной точки* называется совокупность всех точек  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $|z| > R$  (с соединением бесконечно удаленной точки), т. е. совокупность всех точек  $z$ , лежащих вне круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса  $R$ .

Найти пределы следующих последовательностей:

$$82. z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i \frac{\pi}{n}}. \quad 83. z_n = \frac{i^n}{n}.$$

84.  $z_n = (1 + 3i)^n.$

85.  $z_n = \frac{e^{in}}{n^2}.$

86.  $z_n = \frac{n+2i}{3n+7i}.$

87.  $z_n = e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n}\right)}.$

88.  $z_n = n \sin \frac{i}{n}.$

89.  $z_n = n \cos \frac{n\pi}{2} + in \sin \frac{n\pi}{2}.$

90.  $z_n = \frac{\text{sh } in}{n}.$

91. Известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty, \quad z_n = x_n + iy_n.$$

Что можно сказать о существовании пределов последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  при  $n \rightarrow \infty$ ?

2. Определенне 1. *Окрестностью точки  $z_0$*  плоскости комплексной переменной  $z$  называется всякая область, содержащая эту точку;  $\delta$ -*окрестностью точки  $z_0$*  называется множество всех точек  $z$ , лежащих внутри круга радиуса  $\delta$  с центром в точке  $z_0$ , т. е. множество всех точек  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $|z - z_0| < \delta$ .

Пусть функция  $f(z)$  определена в некоторой окрестности  $\Omega$  точки  $z_0$ , кроме, быть может, самой точки  $z_0$ .

Определенне 2. Число  $A$  называется *пределом функции  $f(z)$  в точке  $z_0$* , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех точек  $z \in \Omega$ , удовлетворяющих условию  $0 < |z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

Здесь предполагается, что  $z_0$  и  $A$  — конечные точки комплексной плоскости.

Приведем еще одно определение предела функции в точке. Пусть функция  $f(z)$  определена в некоторой окрестности  $\Omega$  точки  $z_0$ , кроме, быть может, самой точки  $z_0$ .

Определенне 3. Если для любой последовательности  $\{z_n\}$ ,  $z_n \neq z_0$ , сходящейся к точке  $z_0$ , соответствующая ей последовательность значений функции  $\{f(z_n)\}$  сходится к одному и тому же комплексному числу  $A$ , то число  $A$  называют *пределом функции  $f(z)$  в точке  $z_0$* :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

Здесь конечность  $z_0$  и  $A$  не предполагается.

Существование предела  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , где

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

равносильно существованию двух пределов

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y),$$

причем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y).$$

Пределы функций комплексного переменного обладают следующими свойствами.

Пусть существуют пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B.$$

Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) g(z)] = AB,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

**Определение 4.** Функция  $f(z)$ , заданная в области  $D$ , называется *непрерывной в точке*  $z_0 \in D$ , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Иными словами: функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех точек  $z \in D$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , имеет место неравенство  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .

Для непрерывности функции комплексной переменной

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части, т. е. функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , были непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$  по совокупности переменных  $x$  и  $y$ .

**Определение 5.** Функция  $f(z)$  комплексного переменного называется *непрерывной в области*  $D$ , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сумма, разность и произведение двух функций комплексного переменного  $f(z)$  и  $g(z)$ , непрерывных в области  $D$ , также являются непрерывными функциями в этой области, а функция  $\frac{f(z)}{g(z)}$  непрерывна в тех точках области  $D$ , где  $g(z) \neq 0$ .

Если функция  $f(y)$  непрерывна в точке  $z_0$ , а функция  $F(\tau)$  непрерывна в точке  $\tau_0 = f(z_0)$ , то сложная функция  $F[f(z)]$  непрерывна в точке  $z_0$ .

**Пример 6.** Дана линейная функция

$$\omega = f(z) = az + b,$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные постоянные. Доказать, что в точке  $z_0$  она имеет предел, равный  $w_0 = az_0 + b$ ,  $a \neq 0$ .

**Доказательство.** В самом деле, возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Так как

$$|f(z) - w_0| = |(az + b) - (az_0 + b)| = |az - az_0| = |a| \cdot |z - z_0|,$$

то, выбрав в качестве  $\delta(\varepsilon) > 0$  число  $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ , будем иметь  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$  при  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Это означает, что  $w_0 = az_0 + b$  есть предел функции  $f(z) = az + b$  в точке  $z_0$ ,

Поскольку

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = az_0 + b = f(z_0),$$

то тем самым доказано, что в любой точке  $z_0$  линейная функция непрерывна.

**Пример 7.** Показать, что функция  $w = z^2$  непрерывна при любом значении  $z$ .

**Решение.** Возьмем произвольную точку  $z_0$  и произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Так как значение функции  $f(z) = z^2$  в точке  $z_0$  равно  $f(z_0) = z_0^2$ , то покажем, что существует число  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$  при  $|z - z_0| < \delta$ .

Если  $z \rightarrow z_0$ , то найдется такое число  $M > 0$ , что  $|z| < M$  и  $|z_0| < M$ . Тогда

$$|z^2 - z_0^2| = |(z + z_0)(z - z_0)| = |z + z_0| \cdot |z - z_0| < < (|z| + |z_0|) |z - z_0| < 2M |z - z_0|.$$

Если положить  $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ , то из неравенства  $|z - z_0| < \delta$  будет следовать, что

$$|z^2 - z_0^2| < 2M\delta \leq \varepsilon,$$

т. е. при любом  $z_0$  функция  $w = z^2$  является непрерывной.

Пользуясь определением предела, показать, что

$$92. \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z+1}{z+2} = 1. \quad 93. \lim_{z \rightarrow 3-4i} |z| = 5.$$

Вычислить следующие пределы: ]

$$94. \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}. \quad 95. \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}.$$

$$96. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\operatorname{sh} iz}. \quad 97. \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}i} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}.$$

Доказать, что следующие функции непрерывны на всей комплексной плоскости:

$$98. f(z) = \bar{z}. \quad 99. f(z) = \operatorname{Re} z. \quad 100. f(z) = \operatorname{Im} z.$$



101.  $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ , где  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) — комплексные постоянные.

102. Доказать, что рациональная функция  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , где  $P(z)$  и  $Q(z)$  — многочлены, непрерывна во всех точках комплексной плоскости  $z$ , в которых  $Q(z) \neq 0$ .

103. Показать, что функция  $w = e^z$  непрерывна во всех точках комплексной плоскости.

#### § 4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши — Римана

Пусть функция  $w = f(z)$  определена в некоторой области  $D$  комплексного переменного  $z$ . Пусть точки  $z$  и  $z + \Delta z$  принадлежат области  $D$ . Обозначим

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i \Delta y.$$

**Определение 1.** Функция  $w = f(z)$  называется *дифференцируемой* в точке  $z \in D$ , если отношение  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  имеет конечный предел при  $\Delta z$ , стремящемся к нулю произвольным образом. Этот предел называется *производной* функции  $f(z)$  в данной точке  $z$  и обозначается символом  $f'(z)$  (или  $w'$  или  $\frac{dw}{dz}$ ), так что по определению

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (1)$$

Если  $z = x + iy$ ,  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то в каждой точке дифференцируемости функции  $f(z)$  выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2)$$

называемые *условиями Коши — Римана*.

Обратно, если в некоторой точке  $(x, y)$  функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы как функции действительных переменных  $x$  и  $y$  и, кроме того, удовлетворяют соотношениям (2), то функция  $f(z) = u + iv$  является дифференцируемой в точке  $z = x + iy$  как функция комплексного переменного  $z$ .

**Определение 2.** Функция  $w = f(z)$  называется *аналитической* в данной точке  $z \in D$ , если она дифференцируема как в самой точке  $z$ , так и в некоторой ее окрестности. Функция  $f(z)$  называется *аналитической в области  $D$* , если она дифференцируема в каждой точке этой области. Для любой аналитической функции  $f(z)$  имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

**Пример 1.** Показать, что функция  $w = e^z$  является аналитической на всей комплексной плоскости.

Решение. Имеем  $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ , так что

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  как функции действительных переменных  $x$  и  $y$  дифференцируемы в любой точке  $(x, y)$  (они имеют непрерывные частные производные любого порядка) и при этом удовлетворяют условиям (2).

Следовательно, функция  $w = e^z$  всюду аналитическая. Для  $f(z) = e^z$  получаем согласно формуле (3)

$$(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i (e^x \sin y)'_x = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Итак,  $(e^z)' = e^z$ .

Пример 2. Является ли функция  $w = z\bar{z}$  аналитической хотя бы в одной точке?

Решение. Имеем  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ , так что

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) \equiv 0.$$

Условия Коши — Римана в этом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

и удовлетворяются только в точке  $(0, 0)$ .

Следовательно, функция  $w = z\bar{z}$  дифференцируема только в точке  $z = 0$  и нигде не аналитична.

Покажем, пользуясь определением 1, что функция  $f(z) = z\bar{z}$  дифференцируема в точке  $z = 0$ . В самом деле,  $f(0) = 0$ , поэтому

$$\Delta f = f(0 + \Delta z) - f(0) = \Delta z \cdot \overline{\Delta z}$$

и

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\Delta x - i\Delta y) = 0.$$

Таким образом, производная  $f'(0)$  существует и равна нулю.

Пример 3. Является ли функция  $w = \bar{z} = x - iy$  аналитической?

Решение. Здесь  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = -y$  — всюду дифференцируемые функции переменных  $x$  и  $y$ . Далее

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Так что  $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ , т. е. первое из условий Коши — Римана не выполняется ни в одной точке комплексной плоскости.

Значит, функция  $w = \bar{z}$  — нигде не дифференцируемая, а следовательно, и не аналитическая.

Пользуясь условиями Коши — Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие — нет:

104. а)  $w = z^2\bar{z}$ ; б)  $w = ze^z$ ; в)  $w = |z|\bar{z}$ ; г)  $w = e^{z^2}$ ; д)  $w = |z|\operatorname{Re}\bar{z}$ ; е)  $w = \sin 3z - i$ .

105. а)  $\omega = \bar{z} \operatorname{Re} z$ ; б)  $\omega = \bar{z} \operatorname{Im} z$ ; в)  $\omega = |z| \operatorname{Im} z$ ;  
г)  $\omega = \operatorname{ch} z$ .

106. Показать, что в области  $\operatorname{Re} z > 0$   $\omega = \ln z$  — аналитическая функция.

107. Показать непосредственным вычислением, что при натуральном  $n$

$$(z^n)' = n z^{n-1}.$$

108. Показать, что если аналитические функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  удовлетворяют условию  $f'(z) = \varphi'(z)$ , то  $f(z) = \varphi(z) + \operatorname{const}$ .

109. Показать, что при переходе от декартовых координат  $(x, y)$  к полярным  $(\rho, \varphi)$  условия Коши — Римана (2) принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (4)$$

110. Показать, что если аналитическая функция  $\omega = f(z)$  в некоторой области действительна, то она постоянна.

111. Показать, что если функция  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  аналитична в области  $D$ , то в этой области выполняется равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

112. Пусть  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  — аналитическая функция в области  $D$ . Показать, что семейства линий  $u(x, y) = \operatorname{const}$  и  $v(x, y) = \operatorname{const}$  ортогональны.

113. Показать, что модуль и аргумент аналитической функции

$$f(z) = R(x, y) e^{i\Phi(x, y)}$$

связаны соотношениями

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Пользуясь условиями Коши — Римана, аналитическую функцию  $f(z)$  можно восстановить, если известна ее действительная часть  $u(x, y)$  или мнимая часть  $v(x, y)$  (см. [17]).

Кроме этого, аналитическую в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  можно восстановить по одной из следующих формул (см. [10]):

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - C_0, \quad (5)$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) + C_0, \quad (6)$$

где  $\bar{C}$  — сопряженное число для  $C_0 = f(z_0)$ , а  $\bar{z}_0$  — сопряженное число для  $z_0$ .

**Пример 4.** Найти аналитическую функцию  $w = f(z)$  по известной ее действительной части  $u(x, y) = 2e^x \cos y$  и при дополнительном условии  $f(0) = 2$ .

**Решение.** Первый способ. Имеем  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$ . По первому из условий Коши — Римана должно быть  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ , так что  $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$ . Отсюда  $v(x, y) = \int 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y + \varphi(x)$ , где функция  $\varphi(x)$  пока неизвестна. Дифференцируя  $v(x, y)$  по  $x$  и используя второе из условий Коши — Римана, получим

$$2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y,$$

откуда  $\varphi'(x) = 0$ , а значит,  $\varphi(x) = C$ , где  $C = \text{const}$ .

Итак,  $v(x, y) = 2e^x \sin y + C$ , и, следовательно,

$$f(z) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C) = 2e^z + iC.$$

Постоянную  $C$  найдем из условия  $f(0) = 2$ , т. е.  $2e^0 + iC = 2$ ; отсюда  $C = 0$ . Ответ:  $f(z) = 2e^z$ .

**Второй способ.** Воспользуемся формулой (5). В нашем примере  $u(x, y) = 2e^x \cos y$ ,  $z_0 = 0$ ,  $C_0 = 2$ . Значит, по формуле (5) будем иметь  $f(z) = 2 \cdot 2e^{z/2} \cos \frac{z}{2i} - 2$ . Пользуясь тем, что  $\cos \frac{z}{2i} = \cos \left(-\frac{iz}{2}\right) = \text{ch} \frac{z}{2}$ , получим окончательно  $f(z) = 2e^z$ .

**Пример 5.** Найти аналитическую функцию  $w = f(z)$  по известной ее мнимой части  $v(x, y) = 3x + 2xy$  при условии, что  $f(-i) = 2$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой (6). В нашем примере  $v(x, y) = 3x + 2xy$ ,  $z_0 = -i$ ,  $C_0 = 2$ , так что

$$f(z) = 2i \left( 3 \frac{z+i}{2} + 2 \frac{z+i}{2} \cdot \frac{z-i}{2i} \right) + 2 = 3iz + z^2.$$

Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной части  $u(x, y)$  или мнимой  $v(x, y)$  и значению  $f(z_0)$ :

114. а)  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$ ;

б)  $v = \arctg \frac{y}{x}$  ( $x > 0$ ),  $f(1) = 0$ ;

в)  $u = x^2 - y^2 + 2x$ ,  $f(i) = 2i - 1$ .

115. а)  $v = 2(\text{ch } x \sin y - xy)$ ,  $f(0) = 0$ ;

б)  $u = 2 \sin x \text{ch } y - x$ ,  $f(0) = 0$ ;

в)  $v = 2(2 \text{sh } x \sin y + xy)$ ,  $f(0) = 3$ .

$$116. \text{ а) } v = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y + y, \quad f(0) = 2;$$

$$\text{ б) } v = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2, \quad f(0) = 2.$$

Определение 3. Функция  $\varphi(x, y)$  называется *гармонической* в области  $D$ , если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Если функция  $f(z) = u + iv$  аналитична в некоторой области  $D$ , то ее действительная часть  $u(x, y)$  и мнимая часть  $v(x, y)$  являются гармоническими в этой области функциями.

Однако если  $u_1(x, y)$  и  $v_1(x, y)$  — любые две гармонические функции, то функция  $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$  вовсе не обязана быть аналитической функцией: для аналитичности  $f_1(z)$  нужно, чтобы функции  $u_1$  и  $v_1$  дополнительно удовлетворяли условиям Коши—Римана.

Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям (2), называют *сопряженной парой гармонических функций* (порядок функций в паре существует).

117. Показать, что следующие функции являются гармоническими:

$$\text{ а) } u = x^2 + 2x - y^2; \quad \text{ б) } u = 2e^x \cos y; \quad \text{ в) } u = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\text{ г) } u = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \text{ д) } u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad \text{ е) } u = \ln(x^2 + y^2).$$

118. Могут ли являться действительной или мнимой частями аналитической функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  следующие функции:

$$\text{ а) } u = x^2 - y^2 + 2xy; \quad \text{ б) } u = x^2; \quad \text{ в) } v = \ln(x^2 + y^2);$$

$$\text{ г) } v = \frac{x^2 + 1}{2} y^2.$$

119. При каких условиях трехчлен  $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$  является гармонической функцией?

В следующих примерах даны пары  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  гармонических функций. Найти среди них сопряженные пары гармонических функций.

$$120. \text{ а) } u = 3(x^2 - y^2), \quad v = 3x^2y - y^3;$$

$$\text{ б) } u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\text{ в) } u = x, \quad v = -y; \quad \text{ г) } u = e^x \cos y + 1, \quad v = 1 + e^x \sin y.$$

121. Пусть функция  $u(x, y)$  — гармоническая в области  $D$ , где она имеет непрерывные частные производные любого

порядка. Показать, что последние также будут гармоническими функциями в области  $D$ .

122. Пусть функция  $u = u(x, y)$  — гармоническая в области  $D$ . Найти все функции  $f$ , для которых функция  $f(u)$  будет гармонической в области  $D$ .

123. Пусть функция  $w = f(z)$  — аналитическая в области  $D$ . Какие из функций

$$\text{а) } |w|; \quad \text{б) } \arg w; \quad \text{в) } \ln |w|$$

будут гармоническими в области  $D$ ?

124. Доказать, что произведение сопряженных гармонических в области  $D$  функций  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  будет функцией, гармонической в области  $D$ .

125. Пусть  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  — сопряженная пара гармонических в области  $D$  функций. Какие из следующих пар функций будут в области  $D$  сопряженными гармоническими функциями:

$$\text{а) } Au - Bv, \quad Bu + Av, \quad A, B = \text{const};$$

$$\text{б) } u^2 - v^2, \quad uv; \quad \text{в) } e^u \cos v, \quad e^u \sin v?$$

Пример 6. Найти все гармонические функции вида  $u = f(x^2 + y^2)$ , отличные от постоянной.

Решение. Так как искомые функции должны быть гармоническими, то они должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

Подставим данную функцию в уравнение (7). Для этого найдем ее производные второго порядка. Положим  $t = x^2 + y^2$ . Тогда будем иметь  $u = f(t)$ , где  $t = t(x, y)$ . По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t) \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'(t) \frac{\partial t}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(t) \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + f'(t) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t) \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + f'(t) \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}.$$

Складывая последние два равенства, получим

$$\left[ \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \right] f''(t) + \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) f'(t) = 0$$

или

$$t f''(t) + f'(t) = 0.$$

Для отыскания функции  $f$  мы получили уравнение Эйлера

$$t^2 f''(t) + t f'(t) = 0,$$

общим решением которого является функция

$$f(t) = C_1 \ln t + C_2, \quad C_1, C_2 - \text{const.}$$

Итак, искомые гармонические функции имеют вид

$$u = f(x^2 + y^2) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2.$$

В следующих задачах найти все гармонические функции указанных видов:

126.  $x = f(ax + by)$ ;  $a, b$  — постоянные.

127.  $u = f(xy)$       128.  $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ .

129.  $u = f(x^2 - y^2)$ .    130.  $u = f(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ .

131.  $u = f\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$ .

Геометрический смысл модуля  
и аргумента производной

Пусть функция  $f(z)$  — аналитическая в точке  $z_0$  и  $f'(z_0) \neq 0$ . Тогда  $|f'(z_0)|$  равен коэффициенту растяжения в точке  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$  плоскости  $z$  на плоскость  $w$ ; точнее: при  $|f'(z_0)| > 1$  имеет место растяжение, а при  $|f'(z_0)| < 1$  — сжатие.

Аргумент производной  $f'(z_0)$  геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке  $z_0$  к любой гладкой кривой на плоскости  $z$ , проходящей через точку  $z_0$ , чтобы получить направление касательной в точке  $w_0 = f(z_0)$  к образу этой кривой на плоскости  $w$  при отображении  $w = f(z)$ . Заметим, что если  $\varphi = \arg f'(z) > 0$ , то поворот происходит против часовой стрелки, а при  $\varphi < 0$  — по часовой.

Пример 7. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении  $w = z^2$  в точке  $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ .

Решение. Имеем  $w'(z) = 2z$ , так что  $w'|_{z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ .

Перейдя от алгебраической формы записи комплексного числа  $2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$  к тригонометрической, получим

$$2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Значит,

$$|f'(z)|_{z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = 4,$$

$$\arg f'(z)|_{z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$$

т. е. коэффициент растяжения  $r = 4$ , а угол поворота  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

Найти коэффициент растяжения  $r$  и угол поворота  $\varphi$  при заданных отображениях  $w = f(z)$  в заданных точках:

132. а)  $\omega = e^z$  в точках  $z_1 = \ln 2 + i \frac{\pi}{4}$  и  $z_2 = -1 - i \frac{\pi}{2}$ ;  
 б)  $\omega = \sin z$  в точках  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1 + i$ ;  
 в)  $\omega = z^3$  в точках  $z_1 = 2 - i$  и  $z_2 = 1 + i \frac{\pi}{2}$ .

133. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях:

- а)  $\omega = e^z$ ; б)  $\omega = \ln z$ ; в)  $\omega = \frac{1}{z}$ ; г)  $\omega = z^3$ .

Если функция  $\omega = f(z)$  — аналитическая в некоторой области  $D$ , взаимно однозначно отображает эту область на область  $\tilde{D}$ , то кривая  $L$ , лежащая в области  $D$ , отобразится в некоторую кривую  $\tilde{L}$  в плоскости  $\omega$ , длина которой равна

$$l_{\omega} = \int_L |f'(z)| |dz|, \quad (8)$$

Область  $D$  в плоскости  $z$  при отображении  $\omega = f(z)$  переходит в область  $\tilde{D}$  в плоскости  $\omega$ , причем площадь области  $\tilde{D}$  выражается формулой

$$S_{\tilde{D}} = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy. \quad (9)$$

Таким образом,  $|f'(z)|^2$  равен коэффициенту искажения площади при отображении  $\omega = f(z)$ .

Пример 8. Точка  $z = x + iy$  описывает отрезок

$$x = 1, \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (10)$$

Чему равна длина линии, получающейся при отображении этого отрезка с помощью функции  $\omega = z^2$ ?

Решение. Первый способ. Имеем  $\omega = z^2$  или

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy,$$

т. е.

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

Очевидно, на линии (10) будем иметь

$$\begin{cases} u = 1 - y^2, \\ v = 2y, \end{cases} \quad (11)$$

причем при изменении  $y$  от  $-1$  до  $+1$   $v$  будет меняться от  $-2$  до  $+2$ . Из (11) получаем уравнение параболы

$$u = 1 - \frac{v^2}{4} \quad (\text{рис. 3}). \quad (12)$$

Длина дуги  $A'B'C'$  параболы (12)

$$l_{\omega} = 2 \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{4}} dv = \int_0^2 \sqrt{4 + v^2} dv = 2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$



Второй способ. Пользуясь формулой (8), будем иметь

$$\begin{aligned} S_w &= \int_L |f'(z)| |dz| = \int_L |2z| |dz| = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1+y^2} dy = 4 \int_0^1 \sqrt{1+y^2} dy = \\ &= 2\sqrt{2} + \ln(3+2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Пример 9. Вычислить площадь области, в которую преобразуется при отображении  $w = e^z$  квадрат

$$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon, \quad -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon \quad (\text{рис. 4})$$

$$(a - \text{действительное}, \quad 0 < \varepsilon < \pi, \quad z = x + iy).$$

Вычислить предел отношения площадей этих областей, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Решение. Первый способ. Имеем  $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$  или  $w = \rho e^{i\varphi}$ , где  $\rho = e^x$ ,  $\varphi = y$ . Таким образом, при отображении  $w = e^z$  в плоскости  $w$  получим область, ограниченную двумя лучами  $\arg w = -\varepsilon$  и  $\arg w = \varepsilon$  и дугами двух окружностей  $\rho = e^{a-\varepsilon}$  и  $\rho = e^{a+\varepsilon}$  (рис. 5). Площадь отображенной области будет равна

$$S_w = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\varphi \int_{e^{a-\varepsilon}}^{e^{a+\varepsilon}} \rho d\rho = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon} (e^{4\varepsilon} - 1).$$

Второй способ. Применяя формулу (9), имеем

$$\begin{aligned} S_w &= \iint_D |f'(z)|^2 dx dy = \iint_D e^{2x} dx dy = \\ &= \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{2x} dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon} (e^{4\varepsilon} - 1). \end{aligned}$$

Очевидно, что площадь  $S_z$  области  $D$  равна  $S_z = 4\varepsilon^2$ , поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_w}{S_z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon e^{2a-2\varepsilon} (e^{4\varepsilon} - 1)}{4\varepsilon^2} = e^{2a}.$$

134. Найти площадь образа квадрата  $D \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  при отображении  $w = z^2$  и длину его границы.

135. Найти площадь образа прямоугольника

$$P \left\{ 0 < x_1 \leq x \leq x_2 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y_1 \leq y \leq y_2 < \frac{\pi}{2} \right\}$$

при отображении  $w = \cos z$ ,

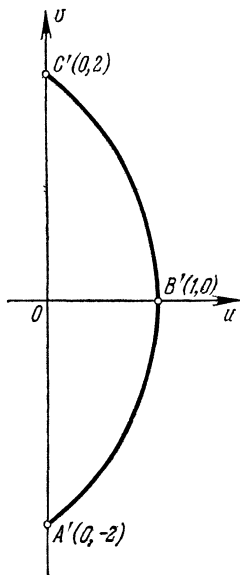


Рис. 3.

136. Пусть  $z$  описывает область, определяемую условиями

$$1 \leq |z| \leq 2, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}.$$

Найти площадь области, полученной при отображении  $w = z^2$ .

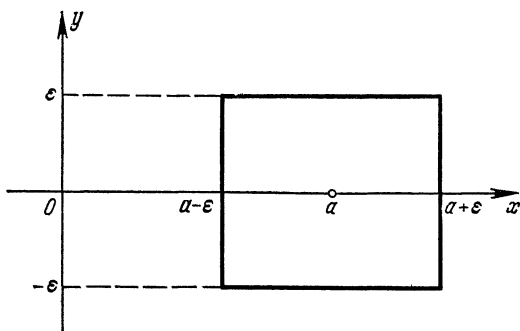


Рис. 4.

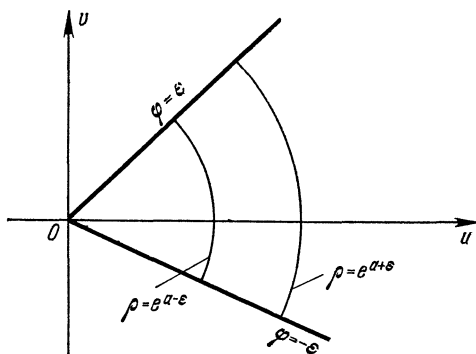


Рис. 5.

137. Найти длину  $L$  спирали, на которую с помощью функции  $w = e^z$  отображается отрезок  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

138. Найти область  $P_w$ , на которую функция  $w = e^z$  отображает прямоугольник  $P \{1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 8\}$ . Вычислить площадь области  $P_w$  с помощью формулы (9) и

объяснить, почему эта формула дает неправильный результат.

139. Найти площадь фигуры, получающейся при отображении треугольника, ограниченного линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ , с помощью функции  $\omega = 1 + iz$ .

## § 5. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть однозначная функция  $f(z)$  определена и непрерывна в области  $D$ , а  $C$  — кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в  $D$ .

Пусть

$$z = x + iy, \quad f(z) = u + iv,$$

где  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  — действительные функции переменных  $x$  и  $y$ .

Вычисление интеграла от функции  $f(z)$  комплексного переменного  $z$  сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов, а именно,

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (1)$$

Интеграл  $\int_C f(z) dz$ , вообще говоря, зависит от пути интегрирования  $C$ .

Если  $f(z)$  — аналитическая функция в односвязной области  $D$ , то интеграл не зависит от пути интегрирования. В этом случае

$$\int_L f(z) dz = 0,$$

где  $L$  — любой замкнутый кусочно-гладкий контур в области  $D$ .

Если кривая  $C$  задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

и начальная и конечные точки дуги  $C$  соответствуют значениям параметра  $t = t_0$ ,  $t = t_1$ , то

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} [z(t)] z'(t) dt, \quad (2)$$

где

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , содержащей точки  $z_0$  и  $z_1$ , то имеет место формула Ньютона — Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z) \Big|_{z_0}^{z_1}, \quad (3)$$

где  $\Phi(z)$  — какая-либо первообразная для функции  $f(z)$ , т. е.

$$\Phi'(z) = f(z)$$

в области  $D$ .

Если функции  $f(z)$  и  $\Phi(z)$  — аналитические в односвязной области  $D$ , а  $z_0$  и  $z_1$  — произвольные точки этой области, то имеет место

формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) \varphi'(z) dz = [f(z) \varphi(z)] \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z) f'(z) dz.$$

Замена переменных в интегралах от функций комплексного переменного производится аналогично случаю функции действительного переменного. Пусть аналитическая функция  $z = \varphi(w)$  отображает взаимно однозначно контур  $C_1$  в  $w$ -плоскости на контур  $C$  в  $z$ -плоскости. Тогда

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f[\varphi(w)] \varphi'(w) dw.$$

Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки  $z_0$ , или окружностью с центром в точке  $z_0$ , то полезно делать замену переменной вида

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}.$$

В первом случае  $\varphi = \text{const}$ , а  $\rho$  — действительная переменная интегрирования, во втором случае  $\rho = \text{const}$ , а  $\varphi$  — действительная переменная интегрирования.

**Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz$$

по линиям, соединяющим точки  $z_1 = 0$ , и  $z_2 = 1 + i$ ,

- 1) по прямой;
- 2) по параболе  $y = x^2$ ;
- 3) по ломаной  $z_1 z_3 z_2$ , где  $z_3 = 1$ .

**Решение.** Перепишем подынтегральную функцию в виде

$$1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y).$$

Здесь  $u = 1 - 2x$ ,  $v = 1 + 2y$ .

Применяя формулу (1), получим

$$\begin{aligned} \int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz &= \int_C (1 - 2x) dx - (1 + 2y) dy + \\ &+ i \int_C (1 + 2y) dx + (1 - 2x) dy. \end{aligned}$$

1) Уравнение прямой, проходящей через точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1 + i$ , будет  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , а значит,  $dy = dx$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz &= \int_0^1 [(1 - 2x) - (1 + 2x)] dx + \\ &+ i \int_0^1 [(1 + 2x) + (1 - 2x)] dx = 2(i - 1). \end{aligned}$$

2) Для параболы  $y = x^2$  имеем  $dy = 2x dx$  ( $0 \leq x \leq 1$ ). Следовательно,

$$\int_C (1+i-2\bar{z}) dz = \int_0^1 [1-2x-(1+2x^2)2x] dx + \\ + i \int_0^1 [1+2x^2+(1-2x)2x] dx = -2 + \frac{4}{3}i.$$

3) На отрезке  $z_1z_3$ :  $y=0$ ,  $dy=0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . На отрезке  $z_2z_3$ :  $x=1$ ,  $dx=0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Используя свойство линейности криволинейных интегралов, получим

$$\int_C (1+i-2\bar{z}) dz = \int_{z_1z_3} (1+i-2\bar{z}) dz + \int_{z_2z_3} (1+i-2\bar{z}) dz = \\ = \int_0^1 (1-2x) dx + i \int_0^1 dx - \int_0^1 (1+2y) dy + i \int_0^1 (1-2 \cdot 1) dy = -2.$$

Этот пример показывает, что интеграл от непрерывной, но не аналитической функции зависит, вообще говоря, от формы пути интегрирования.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_C (z^2 + z\bar{z}) dz,$$

где  $C$  — дуга окружности  $|z|=1$  ( $0 \leq \arg z \leq \pi$ ).

Решение. Положим  $z = e^{i\varphi}$ , тогда  $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$  и

$$\int_C (z^2 + z\bar{z}) dz = \int_0^\pi ie^{i\varphi} (e^{i2\varphi} + 1) d\varphi = \\ = i \int_0^\pi (e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}) d\varphi = \left( \frac{1}{3} e^{i3\varphi} + e^{i\varphi} \right) \Big|_0^\pi = -\frac{8}{3}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл  $\int_C e^{\bar{z}} dz$ , где  $C$  — отрезок прямой  $y = -x$ , соединяющей точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = \pi - i\pi$ .

Решение. Параметрические уравнения линии  $C$  есть

$$x = t, \quad y = -t$$

или в комплексной форме

$$z = t - it,$$

где действительное переменное  $t$  изменяется от 0 до  $\pi$ .

Применяя формулу (2), получим

$$\int_C e^{\bar{z}} dz = \int_0^\pi e^{t+it} (1-i) dt = (1-i) \int_0^\pi e^{(1+i)t} dt = \frac{1-i}{1+i} e^{(1+i)t} \Big|_0^\pi = (e^\pi + 1)i.$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz.$$

Решение. Так как подынтегральная функция  $f(z) = 3z^2 + 2z$  аналитична всюду, то, применяя формулу Ньютона — Лейбница, найдем

$$\begin{aligned} \int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz &= (z^3 + z^2) \Big|_{1-i}^{2+i} = \\ &= (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7 + 19i. \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int_0^i z \cos z dz.$$

Решение. Функции  $f(z) = z$  и  $\varphi(z) = \cos z$  являются аналитическими всюду. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^i z \cos z dz &= \int_0^i z (\sin z)' dz = (z \sin z) \Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = \\ &= i \sin i + \cos z \Big|_0^i = -\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 - 1 = \frac{1-e}{e}. \end{aligned}$$

Однозначные ветви многозначной функции.  
Точки разветвления

Пусть функция  $\omega = f(z)$ , аналитическая в области  $D$ , отображает  $D$  на область  $G$  и такова, что обратная функция  $z = \varphi(\omega)$  многозначна в области  $G$ . Если существуют однозначные, аналитические в области  $G$  функции  $z = \varphi_1(\omega)$ ,  $z = \varphi_2(\omega)$ , ..., для которых данная функция  $\omega = f(z)$  является обратной, то функции  $\varphi_1(\omega)$ ,  $\varphi_2(\omega)$ , ... называются *однозначными ветвями функции*  $\varphi(\omega)$ , определенными в области  $G$ .

Например, функция  $\omega = z^n$  каждой точке  $z_0$  ставит в соответствие единственную точку  $\omega_0$ , но одной и той же точке  $\omega_0$  ( $\omega \neq 0$ ,  $\omega \neq \infty$ ) функция  $z = \sqrt[n]{\omega}$  ставит в соответствие  $n$  различных точек плоскости  $z$ ; при этом если  $\omega = \rho e^{i\theta}$ , то эти  $n$  значений  $z$  находятся по формулам  $z_k = r e^{i\varphi_k}$ , где

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (-\pi < \theta \leq \pi, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Пусть односвязная область  $G$  содержит точку  $\omega_0$ , но не содержит точек  $\omega=0$  и  $\omega=\infty$ . Тогда различным фиксированным значениям  $k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) при одном и том же выборе числа  $\theta_0$  (например,  $\theta_0 = \arg \omega_0$ ) соответствуют различные ветви функции  $z = \sqrt[n]{\omega}$ .

Точка, обладающая тем свойством, что обход вокруг нее в достаточно малой окрестности влечет за собой переход от одной ветви

многозначной функции к другой, называется *точкой разветвления* рассматриваемой многозначной функции. Точками разветвления функции  $\sqrt[n]{\omega}$  являются точки  $\omega=0$  и  $\omega=\infty$ .

После  $n$ -кратного обхода вокруг точки  $\omega=0$  мы вернемся к первоначальной ветви функции  $\sqrt[n]{\omega}$ ; точки разветвления, обладающие таким свойством, называются *алгебраическими* точками разветвления порядка  $n-1$ . В каждой из этих точек функция имеет только одно значение:  $\sqrt[n]{0}=0$ ,  $\sqrt[n]{\infty}=\infty$ , т. е. различные ветви функции в этих точках совпадают.

Для логарифмической функции  $\omega=\text{Ln } z$  точками разветвления являются  $z=0$  и  $z=\infty$ , причем  $\text{Ln } 0=\infty$  и  $\text{Ln } \infty=\infty$ . Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг точки  $z=0$  не приведет к первоначальной ветви функции  $\text{Ln } z$ . Такие точки ветвления называются *логарифмическими*. При интегрировании необходимо выделять ветвь многозначной функции. Это достигается заданием значения многозначной функции в некоторой точке контура интегрирования.

Если контур интегрирования  $C$  замкнут, то начальной точкой  $z_0$  пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции.

Пример 6. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

где  $C$  — верхняя дуга окружности  $|z|=1$ . Для  $\sqrt{z}$  берется та ветвь, для которой  $\sqrt{1}=-1$ .

Решение. Первый способ. Функция  $\sqrt{z}$  имеет два значения:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left[ \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right] = -\sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

где  $\varphi = \arg z$ .

Так как значения  $z$  берутся на единичной окружности, то  $|z|=1$ , и, следовательно,

$$\sqrt{z} = \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\sqrt{z} = -\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Условию  $\sqrt{1}=-1$  удовлетворяет второе значение

$$\sqrt{z} = -\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (4)$$

В самом деле, пусть  $z=1$ , тогда  $\arg z=0$  и

$$\sqrt{1} = -\cos 0 - i \sin 0 = -1.$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} \Big|_1^{-1} = 2(\sqrt{-1} - \sqrt{1}).$$

Полагая в формуле (4)  $z = -1$ , найдем

$$\sqrt{-1} = - \left[ \cos \frac{\arg(-1)}{2} + i \sin \frac{\arg(-1)}{2} \right] = - \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -i.$$

Согласно выбору ветви имеем  $\sqrt{1} = 1$  и окончательно получим

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(1 - i).$$

Второй способ. Полагаем  $z = \rho e^{i\varphi}$ , где  $\rho = 1$ , а  $\varphi$  меняется от 0 до  $\pi$ . Из условия  $\sqrt{1} = -1$  следует, что  $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)}$ . Теперь

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} &= \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}} d\varphi = \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)}} = \int_0^\pi ie^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \pi\right)} d\varphi = \\ &= 2e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \pi\right)} \Big|_0^\pi = 2\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\pi}\right) = 2(1 - i). \end{aligned}$$

Пример 7. Вычислить интеграл  $I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz$  по дуге окружности  $|z| = 1$  ( $\ln z$ —главное значение логарифма,  $\ln 1 = 0$ ).

Решение. Первый способ. Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\begin{aligned} I &= \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz = \int_1^i \ln^3 z d(\ln z) = \frac{\ln^4 z}{4} \Big|_1^i = \\ &= \frac{\ln^4 i - \ln^4 1}{4} = \frac{\ln^4 i}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi i}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{64}. \end{aligned}$$

Второй способ. Делаем замену переменной

$$\ln z = w, \quad dw = \frac{dz}{z}.$$

Дуга окружности  $|z| = 1$  переходит в отрезок мнимой оси, заключенный между точками  $(0, 0)$  и  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .



Интеграл примет вид

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2} i} \omega^3 d\omega = \frac{\omega^4}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2} i} = \frac{1}{4} \frac{\pi^4 i^4}{2^4} = \frac{\pi^4}{64}.$$

Третий способ. Положим  $z = e^{i\varphi}$  (здесь  $\rho = |z| = 1$ ). Тогда

$$\ln z = i\varphi, \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi.$$

Действительная переменная  $\varphi$  изменяется в пределах  $0 \leq \varphi \leq \leq \pi/2$ . В этом случае получаем

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i^3 \varphi^3 e^{i\varphi} i d\varphi}{e^{i\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3 d\varphi = \frac{\varphi^4}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{64}.$$

Вычислить следующие интегралы:

140.  $\int_C z \operatorname{Im} z^2 dz$ ,  $C: |z| = 1$  ( $-\pi \leq \arg z \leq 0$ ).

141.  $\int_C e^{z^2} \operatorname{Re} z dz$ ,  $C$  — прямая, соединяющая точки  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1 + i$ .

142.  $\int_C \ln z dz$  ( $\ln z$  — главное значение логарифма),  $C: |z| = 1$ , а) начальная точка пути интегрирования  $z_0 = 1$ ; б)  $z_0 = -1$ . Обход против часовой стрелки.

143.  $\int_C z \operatorname{Re} z dz$ ,  $C: |z| = 1$ . Обход против часовой стрелки.

144.  $\int_C z \bar{z} dz$ ,  $C: |z| = 1$ . Обход против часовой стрелки.

145.  $\int_1^i z e^z dz$ .

146.  $\int_C \operatorname{Re} z dz$ ,  $C$ : а)  $z = (2 + i)t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ); б) ломаная, состоящая из отрезка  $[0, 2]$  действительной оси и отрезка, соединяющего точки  $z_1 = 2$  и  $z_2 = 2 + i$ .

147.  $\int_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) dz$ .

148.  $\int_0^{i+1} z^3 dz$ .

$$149. \int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz.$$

150.  $\int_C e^z dz$ ,  $C$ : а) дуга параболы  $y = x^2$ , соединяющая точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1 + i$ ; б) отрезок прямой, соединяющий эти же точки.

151.  $\int_C \cos z dz$ ,  $C$ : отрезок прямой, соединяющий точки  $z_1 = \frac{\pi}{2}$  и  $z_2 = \pi + i$ .

152.  $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ ,  $C$ : а) верхняя половина окружности  $|z| = 1$ ; выбирается та ветвь функции  $\sqrt{z}$ , для которой  $\sqrt{1} = 1$ ; б)  $|z| = 1$ ,  $\operatorname{Re} z \geq 0$ ;  $\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ .

153.  $\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$ ,  $C$ : верхняя половина окружности  $|z| = 1$ ; берется та ветвь функции  $\omega = \sqrt[4]{z^3}$ , для которой  $\sqrt[4]{1} = 1$ .

$$154. \int_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{\frac{z^2}{2}} dz. \quad 155. \int_0^i z \cos z dz.$$

$$156. \int_1^i z \sin z dz. \quad 157. \int_0^i (z - i) e^{-z} dz.$$

158.  $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$  по дуге окружности  $|z| = 1$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ,  $\operatorname{Re} z \geq 0$ .

159.  $\int_1^i \frac{\ln z}{z} dz$  по отрезку прямой, соединяющей точки  $z_1 = 1$  и  $z_2 = i$ .

$$160. \int_0^{1+i} \sin z \cos z dz.$$

161.  $\int_1^i \frac{1 + \operatorname{tg} z}{\cos^2 z} dz$  по прямой, соединяющей точки  $z_1 = 1$  и  $z_2 = i$ .

162.  $\int_{-1}^i \frac{\cos z \, dz}{\sqrt{\sin z}}$  по прямой, соединяющей точки  $z_1 = -1$  и  $z_2 = i$ ; выбираем ту ветвь функции  $\sqrt{\sin z}$ , для которой  $\sqrt{\sin(-1)} = i\sqrt{\sin 1}$ .

163.  $\int_C \operatorname{Re}(\sin z) \cos z \, dz$ ,  $C: |\operatorname{Im} z| \leq 1$ ,  $\operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}$ .

164.  $\int_C z \operatorname{Im}(z^2) \, dz$ ,  $C: |\operatorname{Im} z| \leq 1$ ,  $\operatorname{Re} z = 1$ .

165.  $\int_{-i}^i ze^{z^2} \, dz$ .

166.  $\int_C \operatorname{tg} z \, dz$ ,  $C$ : дуга параболы  $y = x^2$ , соединяющая точки  $z = 0$ ,  $z = 1 + i$ .

## § 6. Интегральная формула Коши

Если функция  $f(z)$  является аналитической в области  $D$ , ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром  $C$ , и на самом контуре, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \, dz}{z - z_0} \quad (z_0 \in D), \quad (1)$$

где контур  $C$  обходится так, что область  $D$  остается все время слева. Интегральная формула Коши позволяет вычислять некоторые интегралы.

**Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} \, dz.$$

**Решение.** Внутри окружности  $|z| = 2$  знаменатель дроби обращается в нуль в точке  $z_0 = -1$ . Для применения формулы (1) перепишем интеграл в следующем виде:

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} \, dz = \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{(z+1)(z+3)} \, dz = \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z - (-1)} \, dz.$$

Здесь  $z_0 = -1$  и функция  $f(z) = \frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}$  является аналитической в круге  $|z| \leq 2$ . Поэтому

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} \, dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \frac{\operatorname{ch}(-i)}{2} = \pi i \operatorname{ch} i = \pi i \cos 1.$$

Пример 2. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл  $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz$ , если:

1)  $C: |z-2|=1$ ; 2)  $C: |z-2|=3$ ; 3)  $C: |z-2|=5$ .

Решение. 1) В замкнутой области, ограниченной окружностью  $|z-2|=1$ , подынтегральная функция аналитическая, поэтому в силу теоремы Коши

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = 0.$$

2) Внутри области, ограниченной окружностью  $|z-2|=3$ , находится одна точка  $z=0$ , в которой знаменатель обращается в нуль. Перепишем интеграл в виде

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = \int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z-6} dz.$$

Функция  $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$  является аналитической в данной области.

Применяя интегральную формулу Коши ( $z_0=0$ ) получим

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6} \Big|_{z=0} = 2\pi i \left( -\frac{1}{6} \right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) В области, ограниченной окружностью  $|z-2|=5$ , имеем две точки  $z=0$ ,  $z=6$ , в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Непосредственно формулу (1) применять нельзя. В этом случае для вычисления интеграла можно поступать так.

Первый способ. Разложим дробь  $\frac{1}{z^2-6z}$  на простейшие. Имеем

$$\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z}.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\begin{aligned} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz &= \frac{1}{6} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z-6} dz - \frac{1}{6} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z} dz = \\ &= \frac{1}{6} 2\pi i e^{36} - \frac{1}{6} 2\pi i = \frac{e^{36}-1}{3} \pi i. \end{aligned}$$

Второй способ. Построим окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  с центрами в точках  $z=0$  и  $z=6$  достаточно малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге  $|z-2| \leq 5$  (рис. 6).

В трехсвязной области, ограниченной окружностями  $|z-2|=5$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме

Коши для многосвязной области

$$\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z} = \int_{\gamma_1} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z} + \int_{\gamma_2} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z}.$$

К каждому интегралу в правой части можно применить интегральную

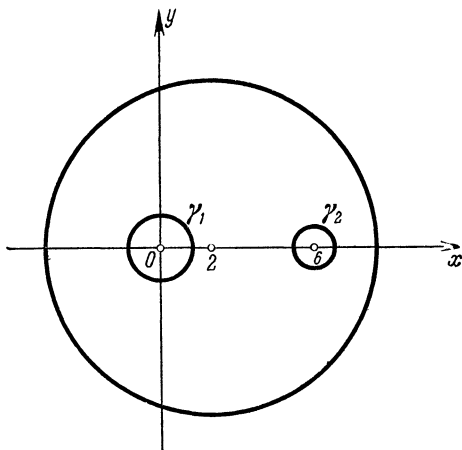


Рис. 6.

формулу Коши (1). В результате получим

$$\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z} = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6} \Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z} \Big|_{z=6} = \frac{e^{36}-1}{3} \pi i.$$

С помощью интегральной формулы Коши вычислить следующие интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

167.  $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z} dz.$

168.  $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz.$

169.  $\int_{|z-1|=2} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3} dz.$

170.  $\int_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3} dz.$

171.  $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{1/(z+2)}} dz.$

172.  $\int_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)} dz.$

173.  $\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}.$

174.  $\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}.$

$$175. \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z} dz.$$

$$176. \int_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z} dz.$$

Если функция  $f(z)$  аналитична в области  $D$  и на ее границе  $C$ , то для любого натурального  $n$  имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad (2)$$

где  $z_0 \in D$ ,  $z \in C$ . Формулой (2) можно пользоваться для вычисления некоторых интегралов.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz.$$

Решение. Подынтегральная функция  $\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}$  является аналитической в области  $|z-1| \leq 1$  всюду, кроме точки  $z_0=1$ . Выделим под знаком интеграла функцию  $f(z)$ , являющуюся аналитической в круге  $|z-1| \leq 1$ . Для этого перепишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2},$$

и в качестве  $f(z)$  возьмем  $\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$ . Полагая в формуле (2)  $n=1$ , получим

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1).$$

Находим производную

$$f'(z) = \left( \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \right)' = \frac{\pi \cos \pi z \cdot (z+1) - 2 \sin \pi z}{(z+1)^3}.$$

Отсюда

$$f'(1) = \frac{2\pi \cos \pi}{2^3} = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{\pi^2}{2} i.$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)}.$$

Решение. Первый способ. Знаменатель  $(z+1)^3(z-1)$  подынтегральной функции обращается в нуль в двух точках  $z_1=-1$ ,  $z_2=1$ , лежащих внутри круга  $|z| \leq 2$ . Разложим на простейшие дроби функцию

$$\frac{1}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{1}{8} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{8} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(z+1)^3}.$$

Используя линейность интеграла, получим

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} dz = \frac{1}{8} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{z-1} - \frac{1}{8} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z+1} dz - \\ - \frac{1}{4} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2} dz - \frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} dz.$$

К первым двум интегралам применяем интегральную формулу Коши (1):

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z-1} dz = 2\pi i \operatorname{ch} 1,$$

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z+1} dz = 2\pi i \operatorname{ch} 1.$$

Третий и четвертый интегралы вычисляем с помощью формулы (2):

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2} dz = 2\pi i (\operatorname{ch} z)' \Big|_{z=-1} = -2\pi i \operatorname{sh} 1,$$

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\operatorname{ch} z)'' \Big|_{z=-1} = \pi i \operatorname{ch} 1.$$

Окончательно получим

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{2\pi i \operatorname{ch} 1}{8} - \frac{2\pi i \operatorname{ch} 1}{8} + \frac{1}{4} 2\pi i \operatorname{sh} 1 - \frac{1}{2} \pi i \operatorname{ch} 1 = \\ = \frac{\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1}{2} \pi i = -\frac{\pi i}{2e}.$$

Второй способ. Построим окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  с центрами в точках  $z_1=-1$  и  $z_2=1$  достаточно малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге  $|z| \leq 2$ . В трехсвязной области, ограниченной окружностями  $|z|=2$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} + \int_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)}. \quad (3)$$

К первому интегралу правой части (3) применим формулу (2), предварительно представив подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{\operatorname{ch} z}{(z-1)^3}$$

Функция  $\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}$  является аналитической внутри  $\gamma_1$ , поэтому в силу формулы (2)

$$\int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left( \frac{\operatorname{ch} z}{z-1} \right)' \Big|_{z=-1} = -\frac{2e^{-1} + \operatorname{ch} 1}{4} \pi i.$$

Ко второму интегралу в правой части (3) применяем интегральную формулу Коши (1)

$$\int_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z}{z-1} dz = 2\pi i \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} \Big|_{z=1} = \pi i \frac{\operatorname{ch} 1}{4}.$$

Окончательно получаем

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} = -\pi i \frac{2e^{-1} + \operatorname{ch} 1}{4} + \pi i \frac{\operatorname{ch} 1}{4} = -\frac{\pi i}{2e}.$$

Вычислить следующие интегралы:

177.  $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz.$

178.  $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3} dz.$

179.  $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2(z-3)} dz.$

180.  $\int_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2} dz.$

181.  $\int_{|z-3|=6} \frac{z dz}{(z-2)^3(z+4)}.$

182.  $\int_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2} dz.$

183.  $\int_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1} dz.$

184.  $\int_{|z-2|=1} \frac{\frac{1}{e^z}}{(z^2+4)^3} dz.$

185.  $\int_{|z|=1/2} \frac{1-\sin z}{z^2} dz.$

186.  $\int_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz.$



## § 7. Ряды в комплексной области

Пусть имеем ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (1)$$

где  $z_n = x_n + iy_n$ .

Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится как ряд

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad (2)$$

так и ряд

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \quad (3)$$

Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \quad (4)$$

Ряды (2), (3), (4) являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

**Пример 1.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}.$$

**Решение.** Имеем  $e^{in} = \cos n + i \sin n$ . Таким образом, вопрос о сходимости данного ряда сводится к вопросу о сходимости рядов с действительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Каждый из этих рядов сходится абсолютно. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

**Пример 2.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

**Решение.** Имеем

$$e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n}$  расходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}$  сходится. Следовательно, данный ряд расходится.

Исследовать на сходимость ряды:

$$187. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}.$$

$$188. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}.$$

$$189. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in^2}{5n^2}.$$

$$190. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n \sqrt{n}}.$$

$$191. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$192. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{2n} \cos in}.$$

$$193. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} i \sqrt{n}}{\sin in}.$$

$$194. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{sh} in}.$$

$$195. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} i \frac{\pi}{n}}{n^{\ln n}}.$$

$$196. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{tg} i \pi n}.$$

Степенной ряд

Ряд вида

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (5)$$

где  $c_0, c_1$  и т. д. — комплексные постоянные, а  $z$  — комплексная переменная, называется *степенным рядом* в комплексной области.

**Теорема Абеля.** Если степенной ряд (5) сходится при некотором значении  $z = z_0$ , то он сходится и притом абсолютно при всех значениях  $z$ , для которых  $|z| < |z_0|$ . Если ряд (5) расходится при  $z = z_1$ , то он расходится и при любом значении  $z$ , для которого  $|z| > |z_1|$ .

Область сходимости ряда (5) есть круг с центром в начале координат.

Радиус сходимости степенного ряда определяется по формулам

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (c_n \neq 0) \quad (6)$$

или

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (7)$$

если указанные пределы существуют.

Пример 3. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n.$$

Решение. Имеем

$$c_n = \cos in = \frac{e^{-n} + e^n}{2} = \operatorname{ch} n.$$

Для нахождения радиуса сходимости  $R$  применяем формулу (6):

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{ch} n|}{|\operatorname{ch}(n+1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} n \cdot \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} n \cdot \operatorname{sh} 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{th} n \cdot \operatorname{sh} 1} = \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1} = e^{-1}, \end{aligned}$$

так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{th} n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2n}}{1 - e^{-2n}} = 1.$$

Итак, радиус сходимости данного степенного ряда  $R = e^{-1}$ .

Пример 4. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n.$$

Решение. Находим модуль коэффициента  $c_n = (1+i)^n$ :

$$|c_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}.$$

Применяя формулу (7), найдем радиус сходимости данного ряда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

197. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n.$$

198. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n.$$

199. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{1-i} \right)^n.$$

200. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{in} \right)^n.$$

$$\begin{array}{ll}
 201. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} z^n. & 202. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{\ln in} \right)^n. \\
 203. \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n. & 204. \sum_{n=1}^n \sin \frac{\pi i}{n} z^n. \\
 205. \sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n. & 206. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sin^n (1 + in)}. \\
 207. \sum_{n=0}^{\infty} (n + i) z^n. & 208. \sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n.
 \end{array}$$

209. Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  имеет радиус сходимости  $r$ , а ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n z^n$  — радиус сходимости  $r'$ .

Оценить радиус сходимости  $R$  следующих рядов:

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + c'_n) z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - c'_n) z^n; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} c_n c'_n z^n; \\
 \text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{c'_n} z^n \quad (c'_n \neq 0).
 \end{array}$$

### Ряды Тейлора и Лорана

Функция  $f(z)$ , однозначная и аналитическая в точке  $z = z_0$ , разлагается в окрестности этой точки в степенной ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (8)$$

коэффициенты которого  $c_n$  вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (9)$$

где  $\Gamma$  — окружность с центром в точке  $z = z_0$ , целиком лежащая в окрестности точки  $z_0$ , в которой функция  $f(z)$  аналитична. Центр окружности круга сходимости находится в точке  $z_0$ ; эта окружность проходит через особую точку  $\zeta$  функции  $f(z)$ , ближайшую к точке  $z_0$ , т. е. радиус сходимости ряда (8) будет равен расстоянию от точки  $z_0$  до ближайшей особой точки функции  $f(z)$ .

Для функций

$$\ln(1+z), \quad (1+z)^\alpha$$

имеют место следующие разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0=0$ :

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \quad (R=1), \quad (10)$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots \\ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} z^n + \dots \quad (R=1). \quad (11)$$

В частности, при  $\alpha = -1$  получим

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots \quad (R=1). \quad (12)$$

Формула (10) дает разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $z=0$  главного значения логарифма; чтобы получить ряд Тейлора для других значений многозначной функции  $\text{Ln}(1+z)$ , следует к ряду (10) прибавлять числа  $2n\pi i$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ :

$$\text{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + 2n\pi i.$$

**Пример 5.** Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0=0$  функцию

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3},$$

используя разложение (12), и найти радиус сходимости ряда.

**Решение.** Разложим данную функцию на простейшие дроби

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \frac{1}{z-3}.$$

Преобразуем правую часть следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

Используя разложение (12) функции  $\frac{1}{1+z}$ , получим

$$f(z) = \frac{1}{4} (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots \right) = \\ = \frac{1}{4} \left( -\frac{4}{3} z + \frac{8}{9} z^2 - \frac{28}{27} z^3 + \dots \right) = -\frac{z}{3} + \frac{2}{3^2} z^2 - \frac{7}{3^3} z^3 + \dots$$

Ближайшей к точке  $z_0=0$  особой точкой данной функции является точка  $z=-1$ . Поэтому радиус сходимости полученного ряда  $R=1$ .

**Пример 6.** Разложить по степеням разности  $z-3$  функцию

$$f(z) = \frac{1}{3-2z}.$$

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3-2(z-3+3)} = \frac{1}{-3-2(z-3)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}.$$

Заменяя в разложении (12)  $z$  на  $\frac{2}{3}(z-3)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-2z} &= -\frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{2}{3}(z-3) + \frac{2^2}{3^2}(z-3)^2 - \frac{2^3}{3^3}(z-3)^3 + \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}(z-3) - \frac{2^2}{3^3}(z-3)^2 + \frac{2^3}{3^4}(z-3)^3 - \dots \end{aligned}$$

Этот ряд сходится при условии

$$\left| \frac{2}{3}(z-3) \right| < 1,$$

или  $|z-3| < \frac{3}{2}$ , т. е. радиус сходимости ряда  $R = \frac{3}{2}$ .

Пример 7. Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням  $z$  функции  $f(z) = \operatorname{tg} z$  и найти радиус сходимости ряда.

Решение. Пусть искомым ряд имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad f^{(0)}(0) = f(0) = 0.$$

Для нахождения значений производных  $f^{(n)}(z)$  в точке  $z=0$  продифференцируем функцию. Имеем

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \text{или} \quad f'(z) = 1 + f^2(z), \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} f''(z) &= 2f(z)f'(z), \\ f'''(z) &= 2[f'^2(z) + f(z)f''(z)], \\ f^{IV}(z) &= 2[3f'(z)f''(z) + f(z)f'''(z)], \\ f^V(z) &= 2[3f''^2(z) + 4f'(z)f'''(z) + f(z)f^{IV}(z)], \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Полагая в (13) и (14)  $z=0$ , найдем

$$f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = 2; \quad f^{IV}(0) = 0; \quad f^V(0) = 16; \dots$$

Подставляя найденные значения производных в ряд, получим

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \dots \quad (15)$$

Ближайшей особой точкой к точке  $z=0$  является точка  $\zeta = \pi/2$ . Поэтому радиус сходимости полученного ряда  $R = \pi/2$ .

В следующих задачах данные функции разложить в ряд Тейлора, используя готовые разложения, и найти радиусы сходимости рядов:

210.  $\sin(2z+1)$  по степеням  $z+1$ .

211.  $\cos z$  по степеням  $z + \frac{\pi}{4}$ .

212.  $e^z$  по степеням  $2z-1$ .

213.  $\frac{1}{3z+1}$  по степеням  $z+2$ .

214.  $\frac{z+1}{z^2+4z-5}$  по степеням  $z$ .

215.  $\frac{z}{z^2+i}$  по степеням  $z$ .

216.  $\cos^2 \frac{iz}{2}$  по степеням  $z$ .

217.  $\operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}$  по степеням  $z$ .

218.  $\ln(2-z)$  по степеням  $z$ .

219.  $\ln(2+z-z^2)$  по степеням  $z$ .

Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням  $z$  следующих функций. Найти радиус сходимости рядов:

220.  $\frac{1}{1+e^z}$ .      221.  $\frac{1}{2+\sin z}$ .      222.  $\frac{1}{e^{-z}+5}$ .

223.  $\ln(1+e^{-z})$ .      224.  $\ln \cos z$ .

225.  $\ln(1+\cos z)$ .      226.  $e^{\frac{1}{1-z}}$ .

227. Найти функцию  $f(z)$ , аналитическую в круге  $|z| \leq 1$  и принимающую на окружности  $|z|=1$  значение

$$\frac{a - \cos \theta + i \sin \theta}{a^2 - 2a \cos \theta + 1}, \quad a > 1, \quad \theta = \arg z.$$

228. Пусть функция  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  является аналитической в круге  $|z| \leq 1$ . Доказать, что среднее значение функции  $\frac{f(z)}{z^n}$  на окружности  $|z|=1$  равно  $a_n$ .

Пусть дан ряд

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \quad (16)$$

Если  $c_{-n} \neq 0$  и существует конечный предел

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}, \quad (17)$$

то этот ряд сходится в области

$$|z - z_0| > r. \quad (18)$$

Пример 8. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$ .

Решение. Здесь  $c_{-n} = (1+i)^{n+1}$ ,  $c_{-n-1} = (1+i)^{n+2}$ ,  $z_0 = 0$ . Поэтому

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1+i)^{n+2}|}{|(1+i)^{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |1+i| = \sqrt{2}.$$

Данный ряд сходится в области  $|z| > \sqrt{2}$ .

Пример 9. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z+i)^n}.$$

Решение. Имеем

$$c_{-n} = \sin in = i \operatorname{sh} n, \quad c_{-n-1} = i \operatorname{sh} (n+1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|i \operatorname{sh} (n+1)|}{|i \operatorname{sh} n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} (n+1)}{\operatorname{sh} n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{e^n - e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e - e^{-2n-1}}{1 - e^{-2n}} = e. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд сходится в области  $|z+i| > e$ , т. е. вне круга с центром в точке  $z_0 = -i$  и радиуса  $e$ .

Определить область сходимости следующих рядов:

$$229. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n}, \quad 230. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}.$$

$$231. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}, \quad 232. \sum_{n=1}^{\infty} e^n (iz)^{-n}.$$

$$233. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}, \quad 234. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{-n}}{(z-2-i)^n}.$$

$$235. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(z+2i)^n}, \quad 236. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}.$$



Ряд вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \\ &= \dots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + \\ &\quad + c_1 (z-z_0) + \dots + c_n (z-z_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots, \quad (20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1 (z-z_0) + c_2 (z-z_0)^2 + \dots \quad (21)$$

Пусть ряд (20) сходится в области  $|z-z_0| > r$ , т. е. вне круга с центром в точке  $z=z_0$  радиуса  $r$ , а ряд (21) в круге  $|z-z_0| < R$ . Тогда, если

- 1)  $r > R$ , то ряд (19) расходится всюду;
- 2)  $r < R$ , то ряд (19) сходится в кольце  $r < |z-z_0| < R$ . Здесь  $r \geq 0$ ,  $0 < R < +\infty$ .

Пример 10. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+1/2}}.$$

Решение. Для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n}$  имеем

$$c_{-n} = e^{in}, \quad c_{-n-1} = e^{i(n+1)}.$$

Следовательно,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e^{i(n+1)}|}{|e^{in}|} = 1,$$

так что первый ряд сходится в области  $|z+1| > 1$ .

Для степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{e^{in+1/2}}$  имеем

$$c_n = e^{-in-1/2}, \quad c_{n+1} = e^{-i(n+1)-1/2}.$$

Его радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e^{-in-1/2}|}{|e^{-i(n+1)-1/2}|} = 1,$$

так что второй ряд сходится в области  $|z+1| < 1$ . Данный ряд расходится всюду.

Пример 11. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{6}\right)^n.$$

Решение. Для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$  имеем

$$c_{-n} = (3+4i)^n, \quad c_{-n-1} = (3+4i)^{n+1};$$

Следовательно,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(3+4i)^{n+1}|}{|(3+4i)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |3+4i| = 5.$$

Первый ряд сходится в области  $|z+2i| > 5$ . Для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$

имеем

$$c_n = 6^{-n}, \quad c_{n+1} = 6^{-n-1}.$$

Поэтому радиус сходимости этого степенного ряда будет равен

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|6^{-n}|}{|6^{-n-1}|} = 6.$$

Он сходится в области  $|z+2i| < 6$ .

Итак,  $r=5 < R=6$ . Следовательно, данный ряд сходится в кольце  $5 < |z+2i| < 6$ .

Определить области сходимости следующих рядов:

$$237. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + in\right) (z+1+i)^n. \quad 238. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n}.$$

$$239. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n (z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in) (z-2+i)^n.$$

$$240. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n.$$

$$241. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n (z+1-i)^n.$$

$$242. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

$$243. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} \quad (0! = 1).$$

$$244. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}.$$

$$245. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}.$$

$$246. -\frac{i}{2(z-i)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2i)^n}.$$

$$247. \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad 248. -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

$$249. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

Функция  $f(z)$ , однозначная и аналитическая в кольце  $r < |z - z_0| < R$  (не исключаются случаи, когда  $r = 0$  и  $R = +\infty$ ), разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (22)$$

где коэффициенты  $c_n$  находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (23)$$

Здесь  $\Gamma$  — произвольная окружность с центром в точке  $z_0$ , лежащая внутри данного кольца.

В формуле (22) ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

называется главной частью ряда Лорана, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называется правильной частью ряда Лорана.

На практике при нахождении коэффициентов  $c_n$  стараются избегать применения формул (23), так как они приводят к громоздким выкладкам. Обычно, если это возможно, используются готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций.

Пример 12. Разложить в ряд Лорана в кольце  $0 < |z-1| < 2$  функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}.$$

Решение. Первый способ. Функция  $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$  является аналитической в кольце  $0 < |z-1| < 2$ . Коэффициенты ряда Лорана находим по формуле (23)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^{n+3} (z+1)^2},$$

где  $\Gamma$  — любая окружность с центром в точке  $z_0=1$ , лежащая в данном кольце.

Если  $n+3 \leq 0$ , т. е.  $n \leq -3$ , то подынтегральная функция  $\frac{1}{(z-1)^{n+3} (z+1)^2}$  будет аналитической во всех точках, заключенных внутри окружности  $\Gamma$ , в том числе и в точке  $z=1$ . В этом случае

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^{n+3} (z+1)^2} = 0,$$

т. е.  $c_n=0$  при  $n=-3, -4, \dots$ . Если  $n+3 > 0$ , т. е.  $n > -3$ , то, применяя формулу (2) из § 6 для производной любого порядка от аналитической функции, получим

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(z-1)^{n+3}} dz = \frac{1}{(n+2)!} \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} \left[ \frac{1}{(z+1)^2} \right] \Big|_{z=1} = \\ &= \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{(-1)^n (n+3)!}{(z+1)^{n+4}} \Big|_{z=1} = \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}}. \end{aligned}$$

Для  $n=-2, -1, 0, 1, 2, \dots$  имеем

$$c_n = \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}}.$$

Ряд Лорана для данной функции в кольце  $0 < |z-1| < 2$  будет иметь вид

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \sum_{n=-2}^{+\infty} c_n (z-1)^n = \sum_{n=-2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}} (z-1)^n$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8} (z-1) + \\ &+ \frac{5}{64} (z-1)^2 - \frac{3}{64} (z-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

Второй способ. Нам нужно представить  $f(z)$  в виде суммы степеней (положительных и отрицательных) разности  $(z-1)$ . Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)^2 = \\ = \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(z+1)^2}. \quad (24)$$

Первые два слагаемых в правой части (24) имеют нужный вид, так как представляют собой степени разности  $(z-1)$ .

Последние два слагаемых запишем в виде

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}, \quad \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} \left[ 1 + \left( \frac{z-1}{2} \right) \right]^{-2}.$$

Применяя формулу (12), а затем формулу (11) при  $\alpha = -2$ , получим

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{z-1}{2} + \left( \frac{z-1}{2} \right)^2 - \left( \frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots \right], \quad (25)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} \left[ 1 - 2 \cdot \frac{z-1}{2} + \frac{-2(-2-1)}{2!} \left( \frac{z-1}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!} \left( \frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots \right]. \quad (26)$$

Подставляя (25) и (26) в (24), найдем

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \\ + \frac{1}{8} \left[ 1 - \frac{z-1}{2} + \left( \frac{z-1}{2} \right)^2 - \left( \frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots \right] + \\ + \frac{1}{16} \left[ 1 - (z-1) + \frac{3}{2^2} (z-1)^2 - \frac{4}{2^3} (z-1)^3 + \dots \right]$$

или

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8} (z-1) + \\ + \frac{5}{64} (z-1)^2 - \frac{3}{64} (z-1)^3 + \dots$$

Пример 13. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}$$

в окрестности точки  $z_0 = 0$ .

Решение. Для любого комплексного  $\zeta$  имеем

$$\cos \zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} - \frac{\zeta^6}{6!} + \dots$$

Полагая  $\zeta = \frac{1}{z}$ , получим

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = z^2 \left( 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots \right) = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots$$

или

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + z^2 + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots$$

Это разложение справедливо для любой точки  $z \neq 0$ . В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой  $z=0$ . Это «кольцо» можно определить с помощью следующего соотношения:  $0 < |z-0| < +\infty$ . Здесь  $r=0$ ,  $R=+\infty$ ,  $z_0=0$ . Данная функция является аналитической в указанном «кольце».

**Пример 14.** Рассмотрим различные разложения в ряд Лорана функции

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2},$$

приняв  $z_0=0$ .

**Решение.** Функция  $f(z)$  имеет две особые точки:  $z_1=-2$  и  $z_2=1$ . Следовательно, имеется три «кольца» с центром в точке  $z_0=0$ , в каждом из которых  $f(z)$  является аналитической:

а) круг  $|z| < 1$ ;

б) кольцо  $1 < |z| < 2$ ;

в)  $2 < |z| < +\infty$  — внешность круга  $|z| \leq 2$ .

Найдем ряды Лорана для функции  $f(z)$  в каждом из этих «колец».

Представим  $f(z)$  в виде суммы элементарных дробей

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}. \quad (27)$$

а) Разложение в круге  $|z| < 1$ . Преобразуем (27) следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z}. \quad (28)$$

Используя формулу (12), получим

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1, \quad (29)$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots, \quad |z| < 2. \quad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (28), получим

$$\begin{aligned} \frac{2z+1}{z^2+z-2} &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 + \dots \end{aligned}$$

Это разложение является рядом Тейлора функции  $f(z)$ .

б) Разложение в кольце  $1 < |z| < 2$ . Ряд (30) для функции  $\frac{1}{1 + \frac{z}{2}}$  остается сходящимся в этом кольце, так как  $|z| < 2$ . Ряд (29)

для функции  $\frac{1}{1 - z}$  расходится для  $|z| > 1$ . Поэтому преобразуем  $f(z)$  следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}. \quad (31)$$

Применяя формулу (12), получим

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \quad (32)$$

Этот ряд сходится для  $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ , т. е. при  $|z| > 1$ .

Подставляя (30) и (32) в (31), найдем

$$\begin{aligned} \frac{2z+1}{z^2+z-2} &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \\ &= \dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots \end{aligned}$$

или

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

в) Разложение для  $|z| > 2$ . Ряд (30) для функции  $\frac{1}{1 + \frac{z}{2}}$  при

$|z| > 2$  расходится, а ряд (32) для функции  $\frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$  будет сходиться,

так как если  $|z| > 2$ , то и подавно  $|z| > 1$ .

Функцию  $f(z)$  представим в таком виде:

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right).$$

Используя формулу (12), получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z} \left( 2 - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{7}{z^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

или

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots$$

Этот пример показывает, что для одной и той же функции  $f(z)$  ряд Лорана, вообще говоря, имеет разный вид для разных колец. Пример 15. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$$

в окрестности ее особых точек.

Решение. Особые точки функции  $f(z)$ :  $z_1=1$ ,  $z_2=2$ .

1) Разложение  $f(z)$  в окрестности точки  $z_1=1$ , т. е. в кольце  $0 < |z-1| < 1$ . Представим функцию  $f(z)$  в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Правую часть преобразуем так:

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)}.$$

Применяя разложение (12), в котором  $z$  заменено на  $-(z-1)$ , получим

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - [1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots]$$

или

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n. \quad (33)$$

2) Разложение  $f(z)$  в окрестности точки  $z_2=2$ , т. е. в кольце  $0 < |z-2| < 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{2z-3}{z^2-3z+2} &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1+(z-2)} = \\ &= \frac{1}{z-2} + 1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + \dots \end{aligned}$$

или

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n. \quad (34)$$

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки  $z=0$  следующие функции:

$$250. \frac{\sin z}{z^2}. \quad 251. \frac{\sin^2 z}{z}. \quad 252. \frac{e^z}{z}.$$

$$253. \frac{e^z}{z^3}. \quad 254. z^3 e^{\frac{1}{z}}. \quad 255. z^4 \cos \frac{1}{z}.$$

$$256. \frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z}. \quad 257. \frac{1-\cos z}{z^2}. \quad 258. \frac{e^z-1}{z}.$$

$$259. \frac{1+\cos z}{z^4}. \quad 260. \frac{1-e^{-z}}{z^3}.$$



Разложить в ряд Лорана следующие функции в окрестностях указанных точек:

$$261. \frac{z}{(z+1)^2}, \quad z_0 = -1. \quad 262. \frac{\sin z}{z-2}, \quad z_0 = 2.$$

$$263. ze^{\frac{1}{z+i}}, \quad z_0 = -i.$$

Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

$$264. \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad \text{а) } 2 < |z| < 3; \quad \text{б) } 3 < |z| < +\infty.$$

$$265. \frac{1}{z^2+z}, \quad \text{а) } 0 < |z| < 1; \quad \text{б) } 1 < |z| < +\infty.$$

$$266. \frac{1}{(z+2)(1+z^2)}, \quad \text{а) } 1 < |z| < 4; \quad \text{б) } 4 < |z| < +\infty.$$

$$267. \frac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$268. \frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}, \quad \text{а) } |z| < 1; \quad \text{б) } 1 < |z| < 2; \quad \text{в) } 2 < |z| < \infty.$$

$$269. \frac{2}{z^2-1}, \quad 1 < |z+2| < 3.$$

$$270. \frac{1}{z^2+2z-8}, \quad 1 < |z+2| < 4.$$

$$271. \frac{z+2}{z^2-4z+3}, \quad 2 < |z-1| < +\infty.$$

$$272. \frac{z^5}{(z^2-4)^2}, \quad 2 < |z| < +\infty.$$

$$273. \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$274. \frac{1}{z^2+1}, \quad 0 < |z-i| < 2.$$

$$275. \frac{1}{(z^2-4)^2}, \quad 4 < |z+2| < +\infty.$$

## § 8. Нули функции. Изолированные особые точки

1. Нули функции. Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в точке  $z_0$ . Точка  $z_0$  называется *нулем функции  $f(z)$  порядка (или кратности)  $n$* , если выполняются условия

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Если  $n=1$ , то точка  $z_0$  называется простым нулем.

Точка  $z_0$  тогда и только тогда является нулем  $n$ -го порядка функции  $f(z)$ , аналитической в точке  $z_0$ , когда в некоторой окрестно-

сти этой точки имеет место равенство

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где функция  $\varphi(z)$  аналитична в точке  $z_0$  и  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

**Пример 1.** Найти нули функции  $f(z) = 1 + \cos z$  и определить их порядок.

**Решение.** Приравнявая  $f(z)$  нулю, получим  $\cos z = -1$ , откуда  $z_n = (2n + 1)\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — нули данной функции. Далее

$$f'[(2n + 1)\pi] = -\sin(2n + 1)\pi = 0,$$

$$f''[(2n + 1)\pi] = -\cos(2n + 1)\pi = 1 \neq 0.$$

Следовательно, точки  $z_n = (2n + 1)\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) являются нулями второго порядка данной функции.

**Пример 2.** Найти нули функции  $f(z) = 1 - e^z$  и определить их порядки.

**Решение.** Приравнявая  $f(z)$  нулю, найдем нули  $z_n = 2n\pi i$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) функции  $f(z)$ . Далее

$$f'(2n\pi i) = -e^{2n\pi i} = -1 \neq 0.$$

Итак,  $f(2n\pi i) = 0$ ,  $f'(2n\pi i) \neq 0$ , следовательно, точки  $z_n = 2n\pi i$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — простые нули функции  $f(z) = 1 - e^z$ .

**Пример 3.** Найти порядок нуля  $z_0 = 0$  для функции

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}$$

**Решение.** Используя разложение функции  $\sin z$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0 = 0$ , получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)} = \\ &= \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots} = \frac{z^5}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots} = z^5 \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots}. \end{aligned}$$

Положим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots}.$$

Тогда  $f(z) = z^5 \varphi(z)$ , где  $\varphi(z)$  — функция, аналитическая в точке  $z_0 = 0$ , причем  $\varphi(0) = 6 \neq 0$ . Следовательно, точка  $z_0 = 0$  является для данной функции нулем пятого порядка.

**Пример 4.** Найти нули функции  $f(z) = (z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z$  и определить их порядки.

**Решение.** Полагая  $f(z) = 0$ , получим  $(z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z = 0$ , откуда  $z^2 + 1 = 0$  или  $\operatorname{sh} z = 0$ . Решая эти уравнения, находим нули функции  $f(z)$ :

$$z = -i, \quad z = i, \quad z = k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пусть  $z = -i$ , тогда  $f(z)$  можно представить в виде

$$f(z) = (z + i)^3 \varphi(z),$$

где функция  $\varphi(z) = (z-i)^3 \operatorname{sh} z$  является аналитической в точке  $z = -i$ , причем  $\varphi(-i) = 8i \operatorname{sh} i = -8 \sin 1 \neq 0$ . Это означает, что точка  $z = -i$  есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что и точка  $z = i$  является нулем третьего порядка. Исследуем нули  $z = k\pi i$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Производная

$$f'(z) = 6z(z^2 + 1)^2 \operatorname{sh} z + (z^2 + 1)^3 \operatorname{ch} z$$

в точках  $z = k\pi i$  отлична от нуля. Следовательно,  $z = k\pi i$  — нули первого порядка.

У следующих функций найти нули и определить их порядки:

$$276. \text{ а) } f(z) = z^4 + 4z^2; \quad \text{ б) } f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

$$277. \text{ а) } f(z) = z^2 \sin z; \quad \text{ б) } f(z) = \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}.$$

$$278. \text{ а) } f(z) = 1 + \operatorname{ch} z; \quad \text{ б) } f(z) = \frac{(1 - \operatorname{sh} z)^2}{z}.$$

$$279. \text{ а) } f(z) = (z + \pi i) \operatorname{sh} z; \quad \text{ б) } f(z) = \cos z^3.$$

$$280. \text{ а) } f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z}); \quad \text{ б) } f(z) = \cos z + \operatorname{ch} iz.$$

Найти порядок нуля  $z_0 = 0$  для следующих функций:

$$281. f(z) = \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{z}{2}\right)^2}. \quad 282. f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}.$$

$$283. f(z) = \frac{z^3}{1 + z - e^z}. \quad 284. f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2.$$

$$285. f(z) = \frac{(1 - \cos 2z)^2}{z - \operatorname{sh} z}. \quad 286. f(z) = (e^z - e^{z^2}) \ln(1 - z).$$

$$287. f(z) = z^2(e^{z^2} - 1). \quad 288. f(z) = 6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6).$$

289. Точка  $z_0$  является нулем порядка  $n$  для функции  $\varphi(z)$  и нулем порядка  $m$  для функции  $\psi(z)$ . Чем является точка  $z_0$  для функций

$$\text{ а) } \varphi(z) + \psi(z); \quad \text{ б) } \varphi(z) \cdot \psi(z); \quad \text{ в) } \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}?$$

2. Изолированные особые точки. Точка  $z_0$  называется *изолированной особой точкой* функции  $f(z)$ , если существует окрестность этой точки, в которой  $f(z)$  аналитична всюду, кроме самой точки  $z = z_0$ .

Точка  $z_0$  называется *устранимой особой точкой* функции  $f(z)$ , если существует конечный предел функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ .

$$\text{Пример 5. } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Особая точка функции  $f(z)$  есть  $z_0 = 0$ . Имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Следовательно, точка  $z_0 = 0$  есть *устраняемая особая точка*.

Точка  $z_0$  называется *полюсом* функции  $f(z)$ , если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

Для того чтобы точка  $z_0$  была полюсом функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ .

Точку  $z_0$  называют *полюсом порядка  $n$  ( $n \geq 1$ )* функции  $f(z)$ , если эта точка является нулем порядка  $n$  для функции  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ . В случае  $n=1$  полюс называют *простым*.

Пример 6.  $f(z) = \frac{1}{z^3}$ .

Особая точка  $z_0=0$ . Положим  $z = \rho e^{i\varphi}$ , тогда  $f(z) = \frac{e^{-i3\varphi}}{\rho^3}$ . Очевидно, что  $|f(z)| = \frac{1}{\rho^3}$ , откуда следует, что  $|f(z)|$  неограниченно возрастает, когда  $z \rightarrow 0$  по любому закону. Следовательно,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ , т. е. точка  $z_0=0$  есть полюс этой функции. Для функций  $\varphi(z) = z^3$  точка  $z_0=0$  есть нуль третьего порядка, а значит,  $z_0=0$  является полюсом третьего порядка для функции  $f(z) = \frac{1}{z^3}$ .

Для того чтобы точка  $z_0$  являлась полюсом порядка  $n$  функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы функцию  $f(z)$  можно было представить в виде  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$ , где функция  $\varphi(z)$  аналитична в точке  $z_0$  и  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

Пример 7.  $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$ .

Функция  $f(z)$  имеет две особые точки  $z=-1$  и  $z=1$ . Исследуем точку  $z=-1$ . Представим  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2}.$$

Здесь

$$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z-1}$$

аналитична в окрестности точки  $z=-1$ , причем  $\varphi(-1) = \frac{\sin 1}{2} \neq 0$ .

Следовательно, точка  $z=-1$  является двукратным полюсом данной функции. Аналогично, записав функцию  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z}{z+1}}{z-1},$$

закключаем, что точка  $z=1$  есть простой полюс этой функции.

Точка  $z_0$  называется *существенно особой точкой* функции  $f(z)$ , если в точке  $z_0$  функция  $f(z)$  не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

**Пример 8.** Определить характер особой точки  $z=0$  функции  $f(z) = e^{1/z^2}$ .

**Решение.** Рассмотрим поведение этой функции на действительной и мнимой осях. На действительной оси  $z=x$  и  $f(x) = e^{1/x^2} \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ . На мнимой оси  $z=iy$  и  $f(iy) = e^{-\frac{1}{y^2}} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0$ . Следовательно, предел  $f(z)$  в точке  $z=0$  не существует ни конечный, ни бесконечный. Точка  $z=0$  — существенно особая точка функции  $f(z)$ .

**Пример 9.** Определить характер особой точки  $z=0$  функции

$$f(z) = \frac{1}{2+z^2-2\operatorname{ch} z}.$$

**Решение.** Точка  $z=0$  есть полюс функции  $f(z)$ , так как она является нулем знаменателя. Рассмотрим функцию  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = 2+z^2-2\operatorname{ch} z$ . Для нее  $\varphi(0) = 0$ . Найдем порядок нуля  $z=0$  этой функции. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= 2z - 2\operatorname{sh} z, & \varphi'(0) &= 0; \\ \varphi''(z) &= 2 - 2\operatorname{ch} z, & \varphi''(0) &= 0; \\ \varphi'''(z) &= -2\operatorname{sh} z, & \varphi'''(0) &= 0; \\ \varphi^{IV}(z) &= -2\operatorname{ch} z, & \varphi^{IV}(0) &= -2 \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $z=0$  есть нуль четвертого порядка для  $\varphi(z)$ , а значит, для данной функции  $f(z)$  точка  $z=0$  есть полюс четвертого порядка.

**Пример 10.** Определить характер особой точки  $z=1$  функции

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{2e^{z-1} - z^2 - 1}.$$

**Решение.** Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{2e^{z-1} - z^2 - 1}{\sin \pi z}.$$

Точка  $z=1$  будет нулем третьего порядка для числителя

$$\psi(z) = 2e^{z-1} - z^2 - 1,$$

так как

$$\begin{aligned} \psi(1) &= 0; & \psi'(1) &= (2e^{z-1} - 2z)|_{z=1} = 0; \\ \psi''(1) &= (2e^{z-1} - 2)|_{z=1} = 0; & \psi'''(1) &= 2e^{z-1}|_{z=1} = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Точка  $z=1$  есть нуль первого порядка для знаменателя  $\sin \pi z$  функции  $\varphi(z)$ .

Следовательно, точка  $z=1$  будет нулем порядка  $3-1=2$  для функции  $\varphi(z)$ , а значит — полюсом второго порядка для данной функции.

Определить характер особой точки  $z_0=0$  для следующих функций:

$$290. \text{ а) } \frac{1}{z - \sin z}; \quad \text{ б) } \frac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}; \quad \text{ в) } \frac{1}{e^{-z} + z - 1}.$$

$$291. \text{ а) } \frac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}; \quad \text{ б) } \frac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z}.$$

Найти особые точки и определить их характер у следующих функций:

$$292. \text{ а) } \frac{1}{1 - \sin z}; \quad \text{ б) } \frac{1 - \cos z}{z^2}.$$

$$293. \text{ а) } \frac{1}{e^{z+2}}; \quad \text{ б) } \cos \frac{1}{z}.$$

$$294. \text{ а) } \frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}; \quad \text{ б) } \frac{1}{e^{-z} - 1} + \frac{1}{z^2}.$$

$$295. \text{ а) } e^{-\frac{1}{z^2}}; \quad \text{ б) } \sin \frac{\pi}{z+1}; \quad \text{ в) } \operatorname{ch} \frac{1}{z}.$$

$$296. \text{ а) } \frac{z^2}{\cos z - 1}; \quad \text{ б) } \frac{1 - \sin z}{\cos z}; \quad \text{ в) } \frac{z - \pi}{\sin^2 z}.$$

Имеют место следующие утверждения.

1. Для того чтобы точка  $z_0$  была устранимой особой точкой функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  не содержало главной части.

2. Для того чтобы точка  $z_0$  была полюсом функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения  $f(z)$  в окрестности  $z_0$  содержала лишь конечное число членов

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (c_{-k} \neq 0).$$

Наибольший из показателей степеней у разностей  $z-z_0$ , содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, совпадает с порядком полюса.

3. Точка  $z_0$  тогда и только тогда является существенно особой точкой для функции  $f(z)$ , когда главная часть ее лорановского разложения в окрестности точки  $z_0$  содержит бесконечно много членов.

Пример 11. Установить характер особой точки  $z_0=0$  функции

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}.$$

Решение. Используя разложение в ряд Тейлора для функции  $e^{-z}$  в окрестности точки  $z_0=0$ , получим лорановское разложение функции  $f(z)$  в окрестности нуля

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} (1 - e^{-z}) = \frac{1}{z} \left[ 1 - \left( 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \right] = \\ &= \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \dots \right) = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \dots \end{aligned}$$

Это разложение не содержит главной части. Поэтому точка  $z_0=0$  является устранимой особой точкой.

Функция  $f(z)$ , доопределенная в точке  $z=0$  единицей, т. е.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1-e^{-z}}{z}, & \text{если } z \neq 0, \\ 1, & \text{если } z = 0, \end{cases}$$

является аналитической и в точке  $z_0=0$ .

**Пример 12.** Определить характер особой точки  $z_0=0$  функции

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}.$$

**Решение.** Разлагая функцию  $\cos z$  в ряд Тейлора по степеням  $z$ , получим лорановское разложение функции  $f(z)$  в окрестности нуля:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^7} \left( \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2! z^5} - \frac{1}{4! z^3} + \frac{1}{6! z} - \frac{z}{8!} + \frac{z^3}{10!} - \dots \end{aligned}$$

Разложение в ряд Лорана функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0=0$  содержит конечное число членов с отрицательными степенями  $z$ . Следовательно, точка  $z_0=0$  является полюсом пятого порядка, так как наибольший показатель степени у  $z$ , содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен пяти.

**Пример 13.** Определить характер особой точки  $z=1$  функции

$$f(z) = (z-1) e^{\frac{1}{z-1}}.$$

**Решение.** Используя разложение

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

и полагая  $u = \frac{1}{z-1}$ , получим лорановское разложение функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0=1$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1) \left[ 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2! (z-1)^2} + \frac{1}{3! (z-1)^3} + \dots \right] = \\ &= 1 + (z-1) + \frac{1}{2! (z-1)} + \frac{1}{3! (z-1)^2} + \dots \end{aligned}$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями  $z-1$ . Следовательно, точка  $z_0=1$  является существенно особой точкой функции  $f(z)$ .

Определить характер указанных особых точек:

297.  $\frac{1 + \cos z}{z - \pi}$ ,  $z_0 = \pi$ .      298.  $\frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}$ ,  $z_0 = 1$ .

299.  $\frac{\sin z}{z^2}$ ,  $z_0 = 0$ .      300.  $\frac{\operatorname{sh} z}{z}$ ,  $z_0 = 0$ .

$$301. \cos \frac{1}{z+\pi}, z_0 = -\pi. \quad 302. \frac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}, z=0, z_0=-1.$$

$$303. \frac{\ln(1+z^3)}{z^2}, z_0=0. \quad 304. \frac{\sin^2 z}{z}, z_0=0.$$

$$305. \frac{e^{z+e}}{z+e}, z_0=-e. \quad 306. \cos \frac{1}{z} + \sin \frac{2-\pi z}{2z}, z_0=0.$$

$$307. z \operatorname{sh} \frac{1}{z}, z_0=0.$$

## § 9. Вычеты функций

Пусть точка  $z_0$  есть изолированная особая точка функции  $f(z)$ . *Вычетом* функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  называется число, обозначаемое символом  $\operatorname{res} f(z_0)$  и определяемое равенством

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz. \quad (1)$$

(Другие обозначения:  $\operatorname{res} [f(z); z_0]$ ,  $\operatorname{res} f(z)$ .) В качестве контура  $\gamma$  можно взять окружность с центром в точке  $z_0$  достаточно малого радиуса такого, чтобы окружность не выходила за пределы области аналитичности функции  $f(z)$  и не содержала внутри других особых точек функции  $f(z)$ . Вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении  $f(z)$  в окрестности точки  $z=z_0$ :

$$\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}. \quad (2)$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Если точка  $z_0$  есть полюс  $n$ -го порядка функции  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{f(z)(z-z_0)^n\}. \quad (3)$$

В случае простого полюса ( $n=1$ )

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z-z_0)]. \quad (4)$$

Если функция  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  представима как частное двух аналитических функций

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ , а  $\psi'(z_0) \neq 0$ , т. е.  $z_0$  есть простой полюс функции  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (5)$$

Если точка  $z_0$  есть существенно особая точка функции  $f(z)$ , то для нахождения  $\operatorname{res} f(z_0)$  необходимо найти коэффициент  $c_{-1}$  в лорановском разложении функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$ ; это и будет  $\operatorname{res} f(z_0)$ .



Пример 1. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$$

в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции  $\frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$  являются точ-

ки  $z=0$  и  $z=\pi/4$ . В точке  $z=0$  имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}.$$

Следовательно, точка  $z=0$  есть устранимая особая точка функции  $f(z)$ . Поэтому

$$\operatorname{res} f(0) = 0.$$

В точке  $z=\pi/4$  имеем  $\lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) = \infty$ , т. е. точка  $z=\pi/4$  есть полюс (первого порядка) функции  $f(z)$ .

Согласно формуле (4) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) \left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2} \left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$$

в ее особых точках.

Решение. Особые точки функции  $f(z)$  суть  $z=-1$  и  $z=2$ . Точка  $z=-1$  для функции  $f(z)$  является полюсом третьего порядка. Согласно формуле (3) имеем

$$\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{e^z}{z-2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z^2 - 6z + 10)e^z}{(z-2)^3} = -\frac{17}{54e}.$$

Точка  $z=2$  — полюс первого порядка, поэтому по формуле (4)

$$\operatorname{res} f(2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^z}{(z+1)^3} = \frac{e^3}{27}.$$

Пример 3. Найти вычеты функции  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$  в ее особых точках.

Решение. Особые точки  $f(z)$  — нули знаменателя, т. е. корни уравнения  $z^4 + 1 = 0$ . Имеем

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_4 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Пользуясь формулой (5), получаем

$$\operatorname{res} f(z_1) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}},$$

$$\operatorname{res} f(z_2) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}},$$

$$\operatorname{res} f(z_3) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{9\pi}{4}},$$

$$\operatorname{res} f(z_4) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

**Пример 4.** Найти вычет функции

$$f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}$$

в ее особой точке.

**Решение.** Особая точка функции  $f(z)$  есть точка  $z=0$ . Она является существенно особой точкой функции  $f(z)$ . В самом деле, лорановское разложение функции в окрестности точки  $z=0$  имеет вид

$$f(z) = z^3 \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3! z^6} + \frac{1}{5! z^{10}} - \dots \right) = z - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^7} - \dots,$$

т. е. содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет функции в точке  $z=0$  равен нулю, так как коэффициент  $c_{-1}$  в лорановском разложении  $f(z)$  равен нулю.

Если функция  $f(z)$  имеет вид  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где аналитические функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  в точке  $z_0$  имеют нули выше первого порядка, то в этом случае бывает удобно функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  заменить их разложениями в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0$ .

**Пример 5.** Найти вычет в точке  $z=0$  функции

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z}.$$

**Решение.** Точка  $z=0$  является нулем как числителя  $\varphi(z) = \sin 3z - 3 \sin z$ , так и знаменателя  $\psi(z) = (\sin z - z) \sin z$ . Определим порядки нуля для этих функций, используя разложение в ряд Тейлора  $\sin z$  в окрестности точки  $z=0$ :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Имеем

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sin 3z - 3 \sin z = \\ &= 3z - \frac{3^3 z^3}{3!} + \frac{3^5 z^5}{5!} - \dots - 3 \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \\ &= -\frac{3^3 - 3}{3!} z^3 + \frac{3^5 - 3}{5!} z^5 - \dots = z^3 \varphi_1(z),\end{aligned}$$

где

$$\varphi_1(z) = -\frac{3^3 - 3}{3!} + \frac{3^5 - 3}{5!} z^2 - \dots, \quad \varphi_1(0) = -4 \neq 0;$$

$$\begin{aligned}\psi(z) &= (\sin z - z) \sin z = \left( -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \left( z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= z^4 \left( -\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots \right) \left( 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots \right) = z^4 \psi_1(z),\end{aligned}$$

где

$$\psi_1(z) = \left( -\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots \right) \left( 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots \right), \quad \psi_1(0) = -\frac{1}{6} \neq 0.$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z} = \frac{z^3 \varphi_1(z)}{z^4 \psi_1(z)} = \frac{\varphi_1(z)}{z \psi_1(z)},$$

и так как  $\varphi_1(0) \neq 0$ ,  $\psi_1(0) \neq 0$ , то точка  $z=0$  является простым полюсом данной функции, поэтому ее вычет в этой точке находим по формуле (5)

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(z)}{z \psi_1(z)} z = \frac{\varphi_1(0)}{\psi_1(0)} = \frac{-4}{-\frac{1}{6}} = 24.$$

Вычислить следующие вычеты:

$$308. \operatorname{res}_{z=0} \frac{z^{n-1}}{\sin^n z} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad 309. \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin 2z - 2z}{(1 - \cos z)^2}.$$

$$310. \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos 2z) \sin z}. \quad 311. \operatorname{res}_{z=0} \frac{(1 - \operatorname{ch} z) \operatorname{sh} z}{(1 - \cos z) \sin^2 z}.$$

$$312. \operatorname{res}_{z=0} \frac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad 313. \operatorname{res}_{z=0} \frac{z^2}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}}.$$

Пример 6. Найти вычеты функции  $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$  в ее особых точках.

Решение. Особыми точками данной функции будут  $z=1$  и  $z=0$ . Точка  $z=1$  — простой полюс, поэтому

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \left. \frac{e^{1/z}}{-1} \right|_{z=1} = -e.$$

Для установления характера особой точки  $z=0$  разложим функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки. Имеем

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Перемножая эти ряды, получим

$$\frac{e^{1/z}}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots\right) (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \frac{1}{z} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots + \text{правильная часть},$$

где  $c_{-k} \neq 0$ ,  $k=2, 3, \dots$

Так как главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями  $z$ , то точка  $z=0$  является существенно особой точкой данной функции. Ее вычет в точке  $z=0$  равен

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e - 1.$$

**Пример 7.** Найти вычет функции  $f(z) = \cos z \sin \frac{1}{z}$  в ее особой точке  $z=0$ .

**Решение.** Для установления характера особой точки разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки  $z=0$ . Имеем

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots$$

Перемножая эти ряды, получим

$$f(z) = \cos z \sin \frac{1}{z} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2! 3!} + \frac{1}{4! 5!} + \dots\right) \frac{1}{z} -$$

$$- \left(\frac{1}{0! 3!} + \frac{1}{2! 5!} + \frac{1}{4! 7!} + \dots\right) \frac{1}{z^3} + \dots + \text{правильная часть}.$$

Итак, ряд Лорана в окрестности точки  $z=0$  имеет вид

$$\cos z \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)! (2n+1)!} \frac{1}{z} + c_{-3} \frac{1}{z^3} + \dots + \text{правильная часть},$$

где  $c_{-(2k-1)} \neq 0$ ,  $k=1, 2, \dots$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество членов, а значит, точка  $z=0$  — существенно особая точка данной

функции. Искомый вычет равен

$$\operatorname{res}_{z=0} \left( \cos z \sin \frac{1}{z} \right) = c_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)! (2n+1)!}.$$

**Пример 8.** Найти вычет функции

$$w = z^2 \sin \frac{1}{z+1}$$

в ее особой точке.

**Решение.** Особой точкой данной функции является точка  $z = -1$ . Для установления характера этой точки разложим функцию в ряд Лорана в окрестности точки  $z = -1$ . Для этого выразим  $z^2$  через степени разности  $z - (-1) = z + 1$ . Имеем

$$z^2 = [(z+1) - 1]^2 = (z+1)^2 - 2(z+1) + 1. \quad (1)$$

Ряд Лорана для функции  $\sin \frac{1}{z+1}$  в окрестности точки  $z = -1$  имеет вид

$$\sin \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \frac{1}{5!(z+1)^5} - \dots \quad (2)$$

Перемножая (1) и (2), найдем

$$\begin{aligned} w &= z^2 \sin \frac{1}{z+1} = \\ &= [(z+1)^2 - 2(z+1) + 1] \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \frac{1}{5!(z+1)^5} - \dots \right] = \\ &= \left( 1 - \frac{1}{3!} \right) \frac{1}{z+1} + \frac{2}{3!} \frac{1}{(z+1)^2} + \left( \frac{1}{5!} - \frac{1}{3!} \right) \frac{1}{(z+1)^3} + \dots + [-2 + (z+1)]. \end{aligned}$$

Ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями суммы  $z+1$ . Следовательно, точка  $z = -1$  является существенно особой точкой данной функции и ее вычет в этой точке равен

$$\operatorname{res}_{z=-1} w = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}.$$

**Пример 9.** Найти вычет функции

$$f(z) = e^{1/z^2} \cos z$$

в точке  $z=0$ .

**Решение.** Так как вычет в точке  $z=0$  равен коэффициенту при  $z^{-1}$ , то сразу получаем, что в данном случае этот вычет равен нулю, поскольку функция  $f(z)$  — четная и ее разложение в окрестности точки  $z=0$  не может содержать нечетных степеней  $z$ .

Найти вычеты в особых точках следующих функций:

$$314. f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z}$$

$$315. f(z) = z^3 e^{1/z}.$$

316.  $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 + 1)(z - 3)}$ .

317.  $f(z) = \frac{e^z}{\frac{1}{4} - \sin^2 z}$ .

318.  $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ .

319.  $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^{2n}}$ .

320.  $f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}$ .

321.  $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$ .

322.  $f(z) = \cos \frac{1}{z} + z^3$ .

323.  $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}$ .

324.  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)}$ .

325.  $f(z) = e^{z^2 + \frac{1}{z^2}}$ .

326.  $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$ .

327.  $f(z) = \frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2} z^2}$ .

328.  $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z-i}$ .

329.  $f(z) = \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$  ( $n > 0$  — целое).

330.  $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$ .

331.  $f(z) = \sin z \cos \frac{1}{z}$ .

332.  $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$ .

333.  $f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{1-z}$ .

334.  $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$ .

335.  $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z}}$ .

336.  $f(z) = e^z \sin \frac{1}{z}$ .

### § 10. Теорема Коши о вычетах. Приложение вычетов к вычислению определенных интегралов.

#### Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов

#### 1. Теорема Коши о вычетах

**Теорема.** Если функция  $f(z)$  является аналитической на границе  $C$  области  $D$  и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , то

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$ .

**Решение.** В области  $|z| < 4$  функция  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$  аналитична всюду, кроме точек  $z=0$  и  $z=-1$ .

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1)).$$

Точка  $z=0$  есть устранимая особая точка функции  $f(z)$ , ибо

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = 1.$$

Поэтому  $\operatorname{res} f(0) = 0$ . Точка  $z=-1$  — полюс первого порядка

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} \left\{ \frac{e^z - 1}{z(z+1)} (z+1) \right\} = 1 - e^{-1}.$$

Таким образом,

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (1 - e^{-1}).$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл  $\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz$ .

**Решение.** В области  $D: |z| < 2$  функция  $f(z) = \operatorname{tg} z$  аналитична всюду, кроме точек  $z = \frac{\pi}{2}$  и  $z = -\frac{\pi}{2}$ , являющихся простыми полюсами. Все другие особые точки  $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$  функции  $f(z) = \operatorname{tg} z$  лежат вне области  $D$  и поэтому не учитываются.

Имеем

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'} \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1,$$

$$\operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'} \Big|_{z=-\pi/2} = -1.$$

Поэтому

$$\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz = -4\pi i.$$

**Пример 3.** Вычислять интеграл  $\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz$ .

**Решение.** В области  $D: |z-i| < 3/2$  функция  $f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$  имеет две особые точки:  $z=i$  — полюс первого порядка и  $z=0$  — существенно особая точка.

По формуле (5) из § 9 имеем

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{e^{1/z^2}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Для нахождения вычета в точке  $z=0$  необходимо иметь лорановское разложение функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z=0$ . Однако в данном случае искать ряд Лорана нет необходимости: функция  $f(z)$  четная, и поэтому можно заранее сказать, что в ее лорановском разложении будут содержаться только четные степени  $z$  и  $\frac{1}{z}$ . Так что  $c_{-1}=0$  и, следовательно,

$$\operatorname{res} f(0) = 0.$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}.$$

**Пример 4.** Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz.$$

**Решение.** В круге  $|z| \leq 2$  подынтегральная функция имеет две особые точки  $z=1$  и  $z=0$ . Легко установить, что  $z=1$  есть простой полюс, поэтому

$$\operatorname{res}_{z=1} \left( \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} \right) = \left. \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-1)'} \right|_{z=1} = \sin 1.$$

Для установления характера особой точки  $z=0$  напомним ряд Лорана для функции  $\frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}$  в окрестности этой точки. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} &= -\frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z} = \\ &= -(1+z+z^2+\dots) \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = \\ &= -\left( 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots \right) \frac{1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots + \text{правильная часть,} \\ &\quad c_{-k} \neq 0, \quad k=2, 3, \dots \end{aligned}$$

Так как ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями  $z$ , то точка  $z=0$  является существенно особой. Вычет подынтегральной функции в этой точке равен

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-1} = c_{-1} = -\left( 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots \right) = -\sin 1.$$

Следовательно,

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i (\sin 1 - \sin 1) = 0.$$



Вычислить интегралы:

$$337. \int_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z \, dz.$$

$$338. \int_C \frac{z \, dz}{(z-1)^2(z+2)}, \quad \text{где } C: x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}.$$

$$339. \int_{|z|=2} \frac{e^z \, dz}{z^3(z+1)}.$$

$$340. \int_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} \, dz.$$

$$341. \int_{|z|=1/2} z^2 \sin \frac{1}{z} \, dz.$$

$$342. \int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2-z} \, dz.$$

$$343. \int_{|z+1|=4} \frac{z \, dz}{e^z+3}.$$

$$344. \int_{|z|=1} \frac{z^2 \, dz}{\sin^3 z \cos z}.$$

$$345. \int_{|z-i|=1} \frac{e^z \, dz}{z^4+2z^2+1}.$$

$$346. \int_{|z|=4} \frac{e^{iz} \, dz}{(z-\pi)^3}.$$

$$347. \int_C \frac{\cos \frac{z}{2}}{z^2-4} \, dz, \quad C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$348. \int_C \frac{e^{2z}}{z^3-1} \, dz, \quad C: x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

$$349. \int_C \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} \, dz, \quad C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

$$350. \int_C \frac{z+1}{z^2+2z-3} \, dz, \quad C: x^2 + y^2 = 16.$$

$$351. \int_C \frac{z \sin z}{(z-1)^5} \, dz, \quad C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$352. \int_C \frac{dz}{z^4+1}, \quad C: x^2 + y^2 = 2x.$$

$$353. \int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} \, dz.$$

$$354. \int_{|z|=1/3} (z+1) e^{1/z} \, dz.$$

$$355. \int_{|z|=2/3} \left( \sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz.$$

Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки

Говорят, что функция  $f(z)$  аналитична в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$ , если функция

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

аналитична в точке  $\zeta = 0$ .

Например, функция  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  аналитична в точке  $z = \infty$ , поскольку функция

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sin \zeta$$

аналитична в точке  $\zeta = 0$ .

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (кроме самой точки  $z = \infty$ ).

Точка  $z = \infty$  называется *изолированной особой точкой* функции  $f(z)$ , если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек функции  $f(z)$ .

Функция  $f(z) = \frac{1}{\sin z}$  имеет в бесконечности неизоллированную особенность: полюсы  $z_k = k\pi$  этой функции накапливаются в бесконечности, если  $k \rightarrow \infty$ .

Говорят, что  $z = \infty$  является *устранимой особой точкой*, полюсом или существенно особой точкой функции  $f(z)$  в зависимости от того, конечен, бесконечен или вовсе не существует  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ .

Критерии типа бесконечно удаленной особой точки, связанные с разложением Лорана, изменяются по сравнению с критериями для конечных особых точек.

**Теорема 1.** Если  $z = \infty$  является *устранимой особой точкой* функции  $f(z)$ , то лорановское разложение  $f(z)$  в окрестности этой точки не содержит положительных степеней  $z$ ; если  $z = \infty$  — полюс, то это разложение содержит конечное число положительных степеней  $z$ , в случае существенной особенности — бесконечное число положительных степеней  $z$ .

При этом лорановским разложением функции  $f(z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки будем называть разложение  $f(z)$  в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса  $R$  с центром в точке  $z = 0$  (кроме, быть может, самой этой точки  $z = \infty$ ).

Пусть функция  $f(z)$  — аналитична в некоторой окрестности точки  $z = \infty$  (кроме, быть может, самой этой точки).

Вычетом функции  $f(z)$  в бесконечности называют величину

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz, \quad (1)$$

где  $\gamma^-$  — достаточно большая окружность  $|z| = \rho$ , проходимая по часовой стрелке (так что окрестность точки  $z = \infty$  остается слева, как и в случае конечной точки  $z = a$ ).

Из этого определения следует, что вычет функции в бесконечности равен коэффициенту при  $z^{-1}$  в лорановском разложении  $f(z)$

в окрестности точки  $z = \infty$ , взятому с противоположным знаком:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1}. \quad (2)$$

**Пример 5.** Для функции  $f(z) = \frac{z+1}{z}$  имеем  $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$ . Это выражение можно рассматривать как ее лорановское разложение в окрестности бесконечно удаленной точки. Имеем очевидно, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1,$$

так что точка  $z = \infty$  является устранимой особой точкой, и мы полагаем, как обычно,  $f(\infty) = 1$ . Здесь  $c_{-1} = 1$  и, следовательно,

$$\operatorname{res} f(\infty) = -1.$$

Из этого примера следует, что вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки, в отличие от конечной устранимой особой точки, может оказаться отличным от нуля.

Известные разложения функций  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$  можно рассматривать также как лорановские разложения в окрестности точки  $z = \infty$ . Так как все эти разложения содержат бесконечное множество положительных степеней  $z$ , то перечисленные функции имеют в точке  $z = \infty$  существенную особенность.

**Теорема 2.** Если функция  $f(z)$  имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю.

Так что если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — конечные особые точки функции  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k) = 0$$

или

$$\operatorname{res} f(\infty) = - \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k). \quad (3)$$

Последнее соотношение бывает удобно использовать при вычислении некоторых интегралов.

**Пример 6.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}.$$

**Решение.** Полюсами (конечными) подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

являются корни  $z_1, z_2, z_3, z_4$  уравнения  $z^4 = -1$ , которые все лежат внутри окружности  $|z| = 2$ . Функция  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  в окрестности

бесконечно удаленной точки имеет разложение

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4} \frac{1}{1+\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} - \dots,$$

из которого видно, что  $\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1} = 0$ . В силу равенства (3)

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^4 \operatorname{res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty) = 0.$$

**Пример 7.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz.$$

**Решение.** Подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}$$

внутри окружности  $|z|=3$  имеет пять особых точек, являющихся кратными полюсами. Использование основной теоремы о вычетах приводит к большим вычислениям. Для вычисления данного интеграла удобнее использовать равенство (3), в силу которого будем иметь

$$I = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty). \quad (3')$$

Так как функцию  $f(z)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} = \\ &= \frac{z^{17}}{z^6 \left(1 + \frac{2}{z^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{z^3}\right)^4 z^{12}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{z^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{z^3}\right)^4}, \end{aligned}$$

то отсюда видно, что правильная часть лорановского разложения этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки  $z=\infty$  начинается с члена  $1/z$ . Следовательно,  $\operatorname{res} f(\infty) = -1$ . Подставляя эту величину в равенство (3), получим  $I = 2\pi i$ .

Определить характер бесконечно удаленной точки для следующих функций:

$$356. f(z) = \frac{z^3 - z^2 + z + 6}{z^2}. \quad 357. f(z) = \frac{z+1}{z^4}.$$

$$358. f(z) = \frac{e^z}{z^2}. \quad 359. f(z) = \cos \frac{1}{z}.$$

$$360. f(z) = e^{1/z^2}. \quad 361. f(z) = z^3 e^{1/z}.$$

362. Пусть функция  $f(z)$  представима в виде  $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ , где функция  $\varphi(\zeta)$  — аналитична в точке  $\zeta=0$ .

Доказать, что  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0)$ .

Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислить следующие интегралы:

$$363. \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3} dz. \quad 364. \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{12}}.$$

$$365. \int_{|z|=2} \frac{1000z+2}{1+z^{1224}} dz. \quad 366. \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-1} dz.$$

$$367. \int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz. \quad 368. \int_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz.$$

## II. Приложение вычетов к вычислению определенных интегралов

1. Интегралы от рациональных функций. Пусть  $f(x)$  — рациональная функция,  $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ , где  $P_m(x)$  и  $Q_n(x)$  — многочлены соответственно степеней  $m$  и  $n$ . Если  $f(x)$  непрерывна на всей действительной оси ( $Q_n(x) \neq 0$ ) и  $n \geq m+2$ , т. е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sigma, \quad (4)$$

где  $\sigma$  означает сумму вычетов функции  $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$  во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости.

Пример 8. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a > 0).$$

Решение. Так как подынтегральная функция  $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$  — четная, то

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Введем функцию  $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ , которая на действительной оси, т. е. при  $z=x$ , совпадает с  $f(x)$ . Функция  $f(z)$  имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка в точке  $z=ai$ . Вычет  $f(z)$  относительно этого полюса равен

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(ai) &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} [f(z)(z-ai)^2] = \\ &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2}{(z+ai)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (4), получим

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}.$$

Вычислить следующие интегралы с бесконечными пределами:

$$369. \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

$$370. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$371. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$372. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}}.$$

$$373. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

$$374. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2 (x^2 + b^2)^2}.$$

$$375. \int_0^{\infty} \frac{x^1 + 1}{x^6 + 1} dx.$$

$$376. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx.$$

$$377. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6}.$$

$$378. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

$$379. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(a + bx^2)^4} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$380. \text{Доказать формулу } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \pi.$$

## 2. Интегралы вида

$$\int_0^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx, \quad \int_0^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx,$$

где  $R(x)$  — правильная рациональная дробь,  $\lambda > 0$  — любое вещественное число.

При вычислении таких интегралов удобно пользоваться следующей леммой Жордана:

Пусть  $g(z)$  — функция, аналитическая в верхней полуплоскости ( $0 < \arg z < \pi$ ), за исключением конечного числа особых точек, и стремится в этой полуплоскости к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ . Тогда при  $\lambda > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0,$$

где контур  $C_R$  — полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке 0 и радиусом  $R$  (рис. 7).

Пример 9. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx \quad (a > 0, k > 0).$$

Решение. Введем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2}.$$

Нетрудно видеть, что если  $z = x$ , то  $\text{Im} f(x)$  совпадает с подынтегральной функцией  $\varphi(x) = \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2}$ . Рассмотрим контур, указанный

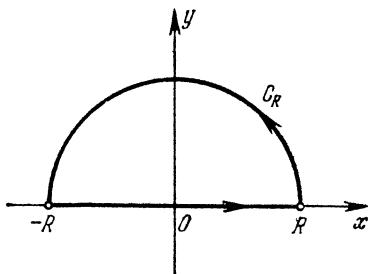


Рис. 7.

на рис. 7. При достаточно большом  $R$  на контуре  $C_R$  функция  $g(z) = \frac{z}{z^2 + k^2}$  удовлетворяет неравенству  $|g(z)| < \frac{R}{R^2 - k^2}$  и, следовательно,  $g(z)$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Значит, по лемме Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 0. \quad (5)$$

Для любого  $R > k$  по теореме о вычетах имеем

$$\int_{-R}^R \frac{xe^{iax}}{x^2 + k^2} dx + \int_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 2\pi i \sigma,$$

где

$$\sigma = \text{res}_{z=ik} \left[ \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} \right] = \lim_{z \rightarrow ik} \left[ \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} (z - ik) \right] = \frac{1}{2} e^{-ak}.$$

В пределе при  $R \rightarrow \infty$ , учитывая соотношение (5), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2 + k^2} dx = \pi i e^{-ak}.$$

Отделяя слева и справа вещественные и мнимые части, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx = \pi e^{-ak}.$$

В силу того, что подынтегральная функция четная, окончательно получим

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-ak}.$$

Пример 10. Найти интегральное представление единичной функции (функции Хевисайда)  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-izt}}{z} dz,$$

где контур  $C$  изображен на рис. 8.

Замыкая контур полуокружностью  $C_R$ , лежащей в верхней полуплоскости, замечаем, что при  $t < 0$  в силу леммы Жордана интегралы

$$\int_{C_R} \frac{e^{-izt}}{z} dz \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

и, так как в области с таким замкнутым контуром подынтегральная функция аналитична, получаем, что  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Построим теперь замыкающие контура с помощью полуокружности  $C'_R$ , лежащей в нижней полуплоскости. Теперь при  $t > 0$  опять получаем в силу леммы Жордана, что интегралы

$$\int_{C'_R} \frac{e^{-izt}}{z} dz \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Но теперь точка  $z=0$  лежит внутри контура интегрирования. Значит, в силу теоремы Коши о вычетах

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-izt}}{z} dz = 1 \quad (t > 0).$$

Итак,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-izt}}{z} dz = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Таким образом, рассмотренный интеграл представляет собой разрывную функцию.

Вычислить следующие интегралы:

$$381. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

$$382. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx.$$

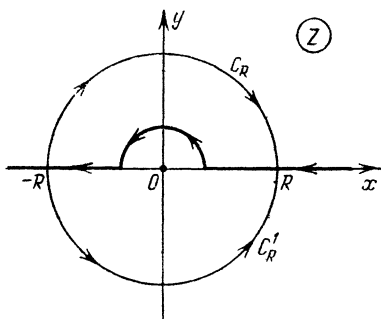


Рис. 8.



$$383. \int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$384. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2+9}.$$

$$385. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4} \, dx \quad (a > 0).$$

$$386. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} \, dx \quad (a > 0).$$

$$387. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2+x^2} \, dx \quad (m > 0, a > 0). \quad 388. \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2+x^4} \, dx.$$

$$389. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{(x^2+1)(x^2+9)} \, dx \quad (\lambda > 0).$$

$$390. \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin ax}{(1+x^2)^2} \, dx \quad (a > 0).$$

$$391. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x \, dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$392. \int_0^{\infty} \frac{3x^2 - a^2}{(x^2+b^2)^2} \cos mx \, dx.$$

Пример 11. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} \, dx \quad (a > 0, b > 0). \quad (6)$$

Решение. Введем функцию  $f(z) = \frac{eiaz}{z(z^2+b^2)}$  такую, что при  $z = x$   $\text{Im} f(z)$  совпадает с подынтегральной функцией в (6). Функция  $f(z)$

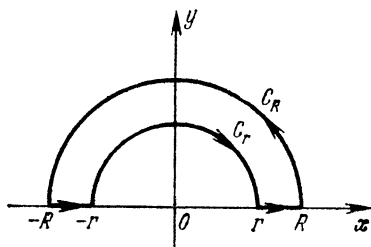


Рис. 9.

имеет особенность на вещественной оси — полюс первого порядка в точке  $z=0$ . Поэтому контур интегрирования выберем так, как указано на рис. 9 (особая точка  $z=0$  обходится малым полукругом  $C_r$  ( $r < b$ ); полукруг  $C_R$  выбираем так, чтобы  $b < R$ ).

Таким образом, внутри замкнутого контура находится лишь один полюс функции  $f(z)$  в точке  $z=bi$ . Согласно теореме Коши о вычетах

$$\int_{-R}^{-r} \frac{eiax}{x(x^2+b^2)} \, dx + \int_{C_r} \frac{eiaz}{z(z^2+b^2)} \, dz + \int_r^R \frac{eiax}{x(x^2+b^2)} \, dx + \int_{C_R} \frac{eiaz}{z(z^2+b^2)} \, dz = 2\pi i \sigma, \quad (7)$$

где

$$\sigma = \operatorname{res}_{z=bi} \frac{eiaz}{z(z^2+b^2)} = \lim_{z \rightarrow bi} \frac{eiaz(z-bi)}{z(z^2+b^2)} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2}. \quad (8)$$

Заменяя в первом интеграле (7)  $x$  на  $-x$  и объединяя его с третьим интегралом, получим

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-r} \frac{eiax}{x(x^2+b^2)} dx + \int_r^R \frac{eiax}{x(x^2+b^2)} dx &= \\ &= \int_r^R \frac{eiax - e^{-iax}}{x(x^2+b^2)} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{eiaz}{z^2+b^2} = \frac{1}{b^2},$$

то подынтегральная функция  $\frac{eiaz}{z(z^2+b^2)}$  представима в виде

$$\frac{eiaz}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2} \frac{1}{z} + \frac{\psi(z)}{z},$$

где  $\lim_{z \rightarrow 0} \psi(z) = 0$ . Полагая  $z = re^{i\varphi}$ , находим

$$\int_{C_r} \frac{eiaz dz}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2} \int_{C_r} \frac{dz}{z} + \int_{C_r} \frac{\psi(z)}{z} dz = -\frac{i\pi}{b^2} + i \int_{\pi}^0 \psi(re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (10)$$

Интеграл в правой части (10) при  $r \rightarrow 0$  имеет пределом нуль

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \psi(re^{i\varphi}) d\varphi = 0. \quad (11)$$

Наконец, согласно лемме Жордана, четвертый интеграл в левой части (7) стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , ибо функция  $g(z) = \frac{1}{z(z^2+b^2)}$  стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{eiaz}{z(z^2+b^2)} dz = 0. \quad (12)$$

Таким образом, при  $R \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow 0$  равенство (7) с учетом соотношений (8) — (12) принимает вид

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx - \frac{\pi i}{b^2} = -\pi i \frac{e^{-ab}}{b^2},$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab}).$$

Вычислить следующие интегралы:

$$393. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad 394. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx.$$

$$395. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$396. \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)^2} dx.$$

3. Вычисление интегралов, содержащих показательную функцию.

Пример 12. Вычислить интегралы Френеля

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx,$$

зная, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (13)$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию  $f(z) = e^{iz^2}$  и контур, указанный на рис. 10 (круговой сектор  $OBAO$ , где

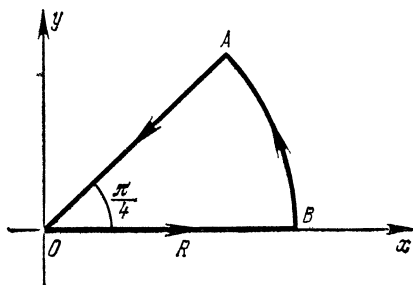


Рис. 10.

$OA = OB = R$  и  $\angle BOA = \pi/4$ ). Внутри этого контура  $f(z)$  — аналитическая, и по теореме Коши

$$\int_{OBAO} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_{AO} e^{iz^2} dz = 0. \quad (14)$$

Покажем, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0. \quad (15)$$

Действительно, полагая  $z^2 = \xi$ , получим  $dz = \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}}$  и

$$\int_{C_R} e^{iz^2} dz = \int_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}} d\xi,$$

где  $\Gamma_{R^2}$  — четверть дуги окружности радиуса  $R^2$ .

Функция  $g(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$  удовлетворяет условиям леммы Жордана, а значит,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}} d\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0.$$

На отрезке  $AO$ :  $z = \rho e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $z^2 = \rho^2 e^{i\frac{\pi}{2}} = \rho^2 i$ ,  $0 \leq \rho \leq R$ . Отсюда

$$\int_{AO} e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{-\rho^2} e^{i\frac{\pi}{4}} d\rho = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho. \quad (16)$$

Перейдя в (14) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , с учетом (15), (16) и (13) будем иметь

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

или

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

откуда получаем

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**Пример 13.** Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad (0 < a < 1).$$

**Решение.** Выберем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

и контур, указанный на рис. 11 (прямоугольник со сторонами  $2R$  и  $2\pi$ ). Внутри этого контура  $f(z)$  аналитична, за исключением точки

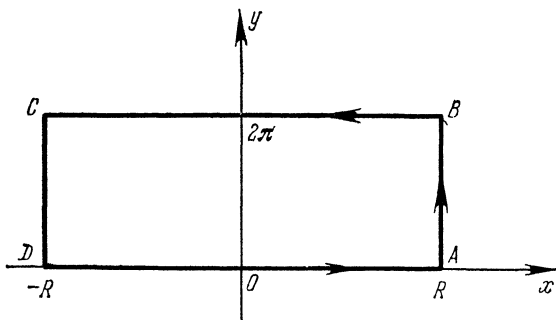


Рис. 11.

$Z = \pi i$ , которая является для нее простым полюсом

$$\operatorname{res} f(\pi i) = \frac{e^{az}}{(1+e^z)'} \Big|_{z=\pi i} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{DA} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_{BC} f(z) dz + \int_{CD} f(z) dz = -2\pi i e^{a\pi i}. \quad (17)$$

На отрезке  $DA$ :  $z = x$ ,  $-R \leq x \leq R$ ; поэтому

$$\int_{DA} = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx. \quad (18)$$

На отрезке  $AB$ :  $z = R + iy$ ,  $0 \leq y \leq 2\pi$ ; поэтому

$$\left| \frac{e^{az}}{1+e^z} \right| = \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1}.$$

Значит,

$$\left| \int_{AB} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R - 1} dy = \frac{2\pi e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty \text{ (ибо } 0 < a < 1). \quad (19)$$

Аналогично получаем

$$\left| \int_{CD} f(z) dz \right| \leq \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} 2\pi \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (20)$$

На отрезке  $BC$ :  $z = x + 2\pi i$ ,  $-R \leq x \leq R$ ; поэтому

$$\int_{BC} = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2a\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx. \quad (21)$$

Переходя к пределу в (17) при  $R \rightarrow \infty$  и учитывая (18) — (21), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{2a\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{a\pi i},$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Вычислить следующие интегралы, содержащие показательную функцию:

$$397. \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \quad (a > 0, b > 0).$$

Указание. Взять  $f(z) = e^{-az^2}$ , контур — прямоугольник со сторонами  $2R$  и  $\frac{b}{2a}$ .

$$398. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1+e^x} dx \quad (0 < a < 1, 0 < b < 1).$$

Указание. Взять  $f(z) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{1+e^z}$ , контур — как на рис. 11.

4. Вычисление интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx, \quad (22)$$

где  $R$  — рациональная функция аргументов  $\cos x$  и  $\sin x$ , ограниченная внутри промежутка интегрирования.

Полагаем  $e^{ix} = z$ , тогда  $dx = \frac{dz}{iz}$  и

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Очевидно, в этом случае  $|z| = 1$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

Интеграл (22) принимает вид

$$\int_C F(z) dz, \quad (23)$$

где  $C$  — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Согласно теореме Коши о вычетах интеграл (23) равен  $2\pi i \sigma$ , где  $\sigma$  есть сумма вычетов относительно полюсов, заключенных внутри окружности  $C$ .

Пример 14. Вычислить интеграл  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}$  ( $a > b > 0$ ).

Решение. Применяя подстановку  $e^{ix} = z$ , получим после простых преобразований

$$I = \frac{4}{i} \int_C \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} F(z_k).$$

Внутри единичного круга при условии, что  $a > b > 0$ , находится только один полюс (двукратный)

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Вычет функции  $F(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$  относительно этого полюса

$$\operatorname{res} F(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z(z - z_1)^2}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} \right\} = \frac{a}{4} (a^2 - b^2)^{-3/2}.$$

Итак,

$$I = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

Вычислить следующие интегралы:

$$399. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad (0 < p < 1).$$

$$400. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x dx}{1 - 2p \cos 2x + p^2} \quad (0 < p < 1).$$

$$401. \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad (p > 1).$$

$$402. \int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{1 - 2p \sin x + p^2} \quad (0 < p < 1).$$

$$403. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} \quad (a > 1).$$

$$404. \int_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x - a) dx \quad (\operatorname{Im} a > 0).$$

$$405. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a + b \cos x} dx \quad (a > b > 0).$$

$$406. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x} \quad (0 < a < 1).$$

$$407. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} \quad (0 < b < a).$$

### III. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов

1. Пусть функция  $f(z)$  аналитична на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , не совпадающих ни с одной из точек  $z=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и пусть  $f(z)$  удовлетворяет условию  $f(z) = O(z^{-2})$  при  $z \rightarrow \infty$  \*). Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{m=1}^k \operatorname{res}_{z=z_m} [f(z) \operatorname{ctg} \pi z]. \quad (24)$$

Пример 15. Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ , где  $a \neq 0$ .

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}.$$

Эта функция всюду аналитична, кроме точек  $z_1 = ai$  и  $z_2 = -ai$ , которые являются простыми полюсами. Так как

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)},$$

то отсюда следует, что

$$\frac{1}{z^2 + a^2} = O(z^{-2}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

---

\*) Запись « $f(z) = O(g(z))$  при  $z \rightarrow \infty$ » означает, что отношение  $\frac{f(z)}{g(z)}$  ограничено при  $z \rightarrow \infty$ :

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq C, \quad \text{где } C = \text{const}, \quad C > 0.$$



Применяя формулу (24), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\pi \left[ \operatorname{res}_{z=ai} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2+a^2} + \operatorname{res}_{z=-ai} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2+a^2} \right].$$

Для функции  $\frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2+a^2}$  точки  $z_1=ai$  и  $z_2=-ai$  являются простыми полюсами, а значит, ее вычеты будут равны

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2+a^2} = \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{2z} \Big|_{z=z_k} = \frac{\operatorname{ctg} \pi z_k}{2z_k}, \quad k=1, 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} &= -\pi \left( \frac{\operatorname{ctg} \pi ai}{2ai} + \frac{\operatorname{ctg} (-\pi ai)}{-2ai} \right) = \\ &= \frac{\pi}{a} i \operatorname{ctg} (\pi ai) = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a. \end{aligned}$$

Ряд в левой части последнего равенства можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} &= \dots + \frac{1}{(-n)^2+a^2} + \dots + \frac{1}{(-2)^2+a^2} + \frac{1}{(-1)^2+a^2} + \\ &+ \frac{1}{0^2+a^2} + \frac{1}{1^2+a^2} + \frac{1}{2^2+a^2} + \dots + \frac{1}{n^2+a^2} + \dots = \\ &= \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}.$$

Искомая сумма данного ряда будет равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi a \operatorname{cth} \pi a - 1}{2a^2}.$$

Найти суммы следующих рядов, в которых число  $a$  не является целым:

$$408. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-a^2}.$$

$$409. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4-a^4}.$$

$$410. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}. \quad 411. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2. Пусть функция  $f(z)$  аналитична на всей комплексной плоскости, кроме конечного числа полюсов  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , не совпадающих ни с одной из точек  $z=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и пусть  $f(z)$  удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leq e^{a|Im z|} \varepsilon(|z|), \quad (25)$$

где  $\varepsilon(|z|) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $z \in G_\rho$ ;  $0 \leq a < \pi$ . Здесь  $G_\rho$  — вся плоскость с выброшенными из нее кругами  $|z - z_m| \leq \rho$ ,  $m=1, 2, \dots, k$ . Тогда справедлива формула

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{m=1}^k \operatorname{res}_{z=z_m} \frac{f(z)}{\sin \pi z}. \quad (26)$$

Пример 16. Найти сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$ ,  $a \neq 0$ .

Решение. Функция  $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$  имеет два простых полюса  $z_1 = ai$  и  $z_2 = -ai$  и она удовлетворяет условию (25), так как

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{1}{|z|^2 - |a|^2},$$

здесь  $\alpha = 0$ ,  $\varepsilon(|z|) = \frac{1}{|z|^2 - |a|^2} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Применяя формулу (26), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\pi \left[ \operatorname{res}_{z=ai} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} + \operatorname{res}_{z=-ai} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} \right].$$

Находим вычеты функции  $\frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z}$  в точках  $z_k$ ,  $k=1, 2$ :

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} = \frac{1}{2z_k \sin \pi z_k + (z_k^2 + a^2) \pi \cos \pi z_k},$$

откуда

$$\operatorname{res}_{z=ai} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} = \frac{1}{2ai \sin \pi ai} = -\frac{1}{2a \operatorname{sh} \pi a},$$

$$\operatorname{res}_{z=-ai} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} = -\frac{1}{2a \operatorname{sh} \pi a}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{a \operatorname{sh} \pi a}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} &= \dots + \frac{(-1)^{-n}}{(-n)^2+a^2} + \dots + \frac{(-1)^{-2}}{(-2)^2+a^2} + \\ &+ \frac{(-1)^{-1}}{(-1)^2+a^2} + \frac{(-1)^0}{0^2+a^2} + \frac{(-1)^1}{1^2+a^2} + \frac{(-1)^2}{2^2+a^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} + \dots \\ &\dots = \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} - \frac{1}{2a^2},$$

а значит,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} = \\ &= \frac{\pi}{2a \operatorname{sh} \pi a} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2a^2} \left( 1 + \frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a} \right). \end{aligned}$$

Найти суммы следующих рядов, считая число  $a$  нецелым:

$$412. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}. \quad 413. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

$$414. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \alpha n}{n^2+a^2}, \quad -\pi < \alpha < \pi.$$

$$415. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+a^2)^2}.$$

## § 11. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше

Логарифмической производной функции  $f(z)$  называется функция  $\varphi(z)$ , являющаяся производной от логарифма функции  $f(z)$ :

$$\varphi(z) = [\operatorname{Ln} f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Особыми точками функции  $\varphi(z)$  могут быть только нули или особые точки функции  $f(z)$ .

Вычет логарифмической производной функции  $f(z)$  относительно точки, являющейся нулем функции  $f(z)$ , равен порядку нуля, а отно-

сительно точки, являющейся полюсом функции, — порядку этого полюса со знаком минус.

**Пример 1.** Найти вычеты логарифмической производной функции  $f(z) = \frac{\sin z}{z+1}$  относительно ее нулей и полюсов.

**Решение.** Данная функция имеет бесконечное множество простых нулей  $z = k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и один простой полюс  $z = -1$ . Отсюда

$$\operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \operatorname{res}_{z=-1} \frac{f'(z)}{f(z)} = -1.$$

Найти вычеты логарифмических производных данных функций относительно их нулей и полюсов:

$$416. f(z) = \frac{\sin z}{z}. \quad 417. f(z) = \cos^3 z.$$

$$418. \text{ а) } f(z) = \frac{\cos z}{z}; \quad \text{ б) } f(z) = \sin z.$$

Пусть функция  $f(z) \neq 0$  аналитична во всех точках замкнутого контура  $C$ . Величина

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

называется *логарифмическим вычетом функции  $f(z)$  относительно замкнутого контура  $C$* .

**Теорема о логарифмическом вычете.** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в замкнутой области  $D$ , кроме конечного числа полюсов, и на границе  $C$  этой области не имеет ни нулей, ни полюсов. Тогда разность между числом нулей и полюсов  $f(z)$  в  $D$ , подсчитанных с их порядками, будет равна логарифмическому вычету функции  $f(z)$  относительно замкнутого контура  $C$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

где  $N$  — число нулей  $f(z)$  в  $D$ ,  $P$  — число полюсов  $f(z)$  в  $D$ .

Логарифмический вычет многочлена

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

относительно контура  $C$  равен числу нулей этого многочлена (с учетом их кратности) в области  $D$ , ограниченной контуром  $C$ .

**Пример 2.** Найти логарифмический вычет функции  $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{e^{iz} - 1}$  относительно контура  $C: |z| = 8$ .

**Решение.** Находим нули  $z_k$  функции  $f(z)$ . Для этого решаем уравнение  $\operatorname{ch} z = 0$  или  $e^z + e^{-z} = 0$ . Записав последнее уравнение

в виде  $e^{2z} = -1$ , найдем  $2z = \text{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$ , так что  $z_k = \frac{2k+1}{2}\pi i$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (все нули простые). Для нахождения полюсов функции  $f(z)$  решаем уравнение  $e^{iz} - 1 = 0$  или  $e^{iz} = 1$ . Имеем  $iz = \text{Ln} 1 = 2m\pi i$ ,  $z_m = 2m\pi$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). В круге  $|z| < 8$  находятся нули

$$z_k = \frac{2k+1}{2}\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, -3)$$

и простые полюсы

$$z_m = 2m\pi \quad (m=0, \pm 1)$$

функции  $f(z)$ . Число нулей  $N=6$ , число полюсов  $P=3$ . Следовательно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=8} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 6 - 3 = 3.$$

**Пример 3.** Найти логарифмический вычет функции

$$f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$$

относительно окружности  $|z| = \pi$ .

**Решение.** Полагая  $1+z^2=0$ , находим два простых нуля функции  $f(z)$ :  $a_1 = -i$ ,  $a_2 = i$ . Полагая  $1-\cos 2\pi z=0$ , найдем полюсы функции  $f(z)$ :  $z_n = n$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Кратность полюсов  $k=2$ .

В круге  $|z| < \pi$  данная функция имеет два простых нуля  $a_1 = -i$ ,  $a_2 = i$  и семь двукратных полюсов

$$z_1 = -3, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = 0, \quad z_5 = 1, \quad z_6 = 2, \quad z_7 = 3.$$

Итак,  $N=2$  и  $P=7$ . В силу теоремы о логарифмическом вычете получаем что логарифмический вычет данной функции  $f(z)$  относительно окружности  $|z| = \pi$  будет равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 7 \cdot 2 = -12.$$

В следующих задачах найти логарифмические вычеты данных функций относительно указанных контуров:

419.  $f(z) = \frac{z}{1+z^3}$ ,  $C: |z| = 2$ .

420.  $f(z) = \cos z + \sin z$ ,  $C: |z| = 4$ .

421.  $f(z) = (e^z - 2)^2$ ,  $C: |z| = 8$ .

422.  $f(z) = \text{th } z$ ,  $C: |z| = 8$ .

423.  $f(z) = \text{tg}^3 z$ ,  $C: |z| = 6$ .

424.  $f(z) = 1 - \text{th}^2 z$ ,  $C: |z| = 2$ .

**Принцип аргумента.** Логарифмический вычет функции  $f(z)$  относительно замкнутого контура  $C$  равен приращению  $\Delta_C \text{Arg } f(z)$

аргумента  $f(z)$  при обходе контура  $C$ , деленному на  $2\pi$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

Следовательно, разность между числом нулей и полюсов функции  $f(z)$ , заключенных в области  $D$ , равна

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

Другими словами, разность  $N - P$  равна числу оборотов, которые совершает в плоскости  $w$  вектор, идущий из точки  $w = 0$  в точку  $w = f(z)$ , когда точка  $z$  описывает контур  $C$  (число оборотов считается положительным, если вектор вращается против часовой стрелки, и отрицательным в противоположном случае).

В частном случае, когда функция  $w = f(z)$  является аналитической в области  $D$  и на ее границе  $C$ , на которой она не обращается в нуль, логарифмический вычет  $f(z)$  относительно  $C$  дает число нулей  $f(z)$  в  $D$ , которое равно изменению  $\operatorname{Arg} f(z)$  при обходе контура  $C$ , деленному на  $2\pi$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} f(z) = N.$$

Это имеет место, например для многочлена  $Q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ .

**Пример 4.** Найти число корней в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$  уравнения

$$Q_5(z) \equiv z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0.$$

**Решение.** В силу принципа аргумента число нулей внутри контура  $C$  равно

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} Q_5(z),$$

где контур  $C$  состоит из полуокружности  $C_R: |z| = R, \operatorname{Re} z > 0$ , и ее диаметра на мнимой оси; радиус  $R$  считаем столь большим, что все нули многочлена  $Q_5(z)$ , находящиеся в правой полуплоскости, попадают внутрь полуокруга  $|z| < R, \operatorname{Re} z > 0$ . Имеем

$$Q_5(z) = z^5 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} Q_5(z) &= \operatorname{Arg} \left[ z^5 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right) \right] = \\ &= \operatorname{Arg} z^5 + \operatorname{Arg} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right) = \\ &= 5 \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right). \end{aligned}$$

Приращение аргумента  $Q_5(z)$  при обходе в положительном направлении

полуокружности  $C_R$  будет равно

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5 \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $R \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_5(z) =$$

$$= 5 \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right).$$

Оба предела в правой части существуют и равны соответственно

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z = \pi,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5\pi.$$

Пусть теперь точка  $z$  движется по мнимой оси от  $z=iR$  до  $z=-iR$ . Положим  $z=it$ ,  $-R \leq t \leq R$ . Тогда

$$Q_5(it) = u(t) + iv(t) = t^4 - 1 + i(t^5 - 2t^3 - 8t),$$

откуда

$$\begin{cases} u = t^4 - 1, \\ v = t^5 - 2t^3 - 8t. \end{cases} \quad (1)$$

Это — параметрические уравнения линии, которую описывает точка  $w = Q_5(z)$  в плоскости  $(u, v)$ , когда точка  $z$  пробегает мнимую ось сверху вниз. Для построения этой линии найдем точки ее пересечения с координатными осями  $Ou$  и  $Ov$ . Приравняв  $u$  и  $v$  нулю, получим соответственно

$$t^4 - 1 = 0 \quad \text{или} \quad t = \pm 1, \quad (2)$$

$$t^5 - 2t^3 - 8t = 0 \quad \text{или} \quad t = \pm 2, \quad t = 0. \quad (3)$$

Заметим, что уравнения (2), (3) не имеют общих корней (действительных), так что многочлен  $Q_5(z)$  не имеет нулей на мнимой оси. Следовательно, применение принципа аргумента к контуру законно. Корни уравнений (2) и (3) располагаем в порядке убывания, т. е. в порядке обхода контура, и находим соответствующие значения  $u$  и  $v$ :

№	$t$	$u$	$v$
1	2	15	0
2	1	0	-9
3	0	-1	0
4	-1	0	9
5	-2	15	0

Далее

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u = \pm\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} v = \pm\infty.$$

Эти данные позволяют построить интересующую нас линию (рис. 12).

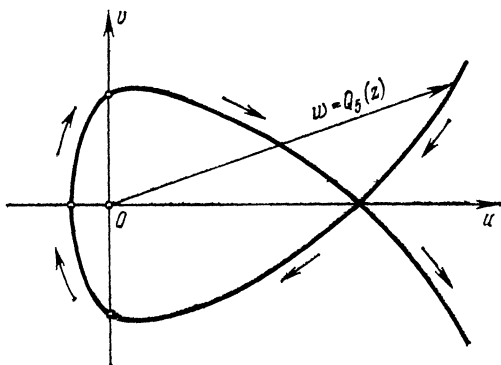


Рис. 12.

Из рис. 12 видно, что вектор  $w = Q_5(z)$  повернется на угол  $\varphi = 3\pi$  в отрицательном направлении. Следовательно,

$$\Delta_C \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5\pi - 3\pi = 2\pi,$$

откуда число нулей в правой полуплоскости будет равно

$$N = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

**Пример 5.** Найти число корней уравнения

$$Q_7(z) \equiv z^7 - 2z - 5 = 0$$

в правой полуплоскости.

**Решение.** Выбираем контур  $C$ , как указано в примере 4. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_7(z) &= \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} (z^7 - 2z - 5) = \\ &= \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left[ z^7 \left( 1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7} \right) \right] = \\ &= 7 \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left( 1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7} \right) = \\ &= 7\pi + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left( 1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7} \right) \rightarrow 7\pi \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Полагаем  $z = it$  ( $-R \leq t \leq R$ ). Тогда

$$Q_7(it) = u(t) + iv(t) = -5 + i(-t^7 - 2t),$$

откуда

$$\begin{cases} u = -5, \\ v = -t(t^6 + 2). \end{cases}$$



Так как  $u \neq 0$ , то применение принципа аргумента законно ( $Q_7(z)$  на мнимой оси не имеет нулей). Эта линия — прямая (рис. 13). Вектор  $w = Q_7(z)$  делает поворот в отрицательном направлении на  $\pi$  радиан. Значит,

$$\Delta_{CR} \operatorname{Arg} Q_7(z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 7\pi - \pi = 6\pi$$

и

$$N = \frac{6\pi}{2\pi} = 3,$$

т. е. данное уравнение имеет три корня в правой полуплоскости.

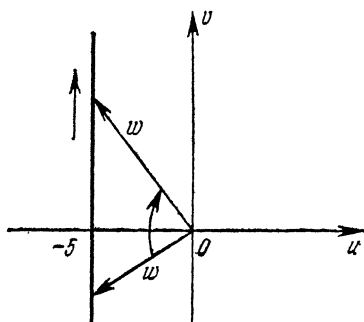


Рис. 13.

Для следующих уравнений определить число корней в правой полуплоскости:

425.  $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$ . 426.  $z^3 - 2z - 5 = 0$ .

427.  $z^3 - 4z^2 + 5 = 0$ . 428.  $2z^3 - z^2 - 7z + 5 = 0$ .

429.  $z^5 + 5z^4 - 5 = 0$ . 430.  $z^{12} - z + 1 = 0$ .

**Теорема Руше.** Пусть функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$ , аналитические в замкнутой области  $D$ , ограниченной контуром  $C$ , во всех точках этого контура удовлетворяют неравенству  $|f(z)| > |\varphi(z)|$ . Тогда их сумма  $F(z) = f(z) + \varphi(z)$  и функция  $f(z)$  имеют в области  $D$  одинаковое число нулей (с учетом их кратности).

**Пример 6.** Найти число нулей функции

$$F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

внутри единичного круга  $|z| < 1$ .

**Решение.** Представим функцию  $F(z)$  в виде суммы двух функций  $f(z)$  и  $\varphi(z)$ , которые выберем, например, так:

$$f(z) = -4z^5, \quad \varphi(z) = z^8 + z^2 - 1.$$

Тогда на окружности  $|z| = 1$  будем иметь

$$|f(z)| = |-4z^5| = 4,$$

$$|\varphi(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + 1 = 3.$$

Итак, на границе  $|z| = 1$  круга выполняется неравенство  $|f(z)| > |\varphi(z)|$ . Функция  $f(z) = -4z^5$  имеет пятикратный нуль в начале координат. В силу теоремы Руше функция

$$F(z) = f(z) + \varphi(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

имеет в круге  $|z| < 1$  пять нулей. Заметим, что возможен и другой выбор функций  $f(z)$  и  $\varphi(z)$ , например, такой:

$$f(z) = z^8 - 4z^5, \quad \varphi(z) = z^2 - 1.$$

Пример 7. Определить число корней уравнения

$$z^6 - 6z + 10 = 0$$

внутри круга  $|z| < 1$ .

Решение. Положим, например  $f(z) = 10$  и  $\varphi(z) = z^6 - 6z$ . На окружности  $|z| = 1$  имеем

$$|f(z)| = 10, \quad |\varphi(z)| = |z^6 - 6z| \leq |z^6| + 6|z| = 7.$$

Итак, во всех точках окружности  $|z| = 1$  выполняется неравенство  $|f(z)| > |\varphi(z)|$ . Функция  $f(z) = 10$  не имеет нулей внутри круга  $|z| < 1$ , а значит, по теореме Руше, не имеет нулей и функция  $z^6 - 6z + 10$ .

Пользуясь теоремой Руше, найти число корней данных уравнений в указанных областях:

$$431. z^4 - 3z^3 - 1 = 0, \quad |z| < 2.$$

$$432. z^3 + z + 1 = 0, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

$$433. z^5 + z^2 + 1 = 0, \quad |z| < 2.$$

$$434. z^8 + 6z + 10 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$435. 27z^{11} - 18z + 10 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$436. z^8 - 6z^6 - z^3 + 2 = 0, \quad |z| < 1.$$

Пример 8. Сколько корней уравнения

$$z^4 - 5z + 1 = 0 \tag{4}$$

находится в кольце  $1 < |z| < 2$ ?

Решение. Пусть  $N$  — число корней уравнения (4) в кольце  $1 < |z| < 2$ . Тогда  $N = N_2 - N_1$ , где  $N_1$  — число корней уравнения (4) в круге  $|z| < 1$ ,  $N_2$  — число корней уравнения (4) в круге  $|z| < 2$  ( $N_2 \geq N_1$ ). Нетрудно видеть, что на окружности  $|z| = 1$  уравнение (4) корней не имеет: если  $|z| = 1$ , то  $|z^4 - 5z + 1| \geq 3$ .

Для нахождения  $N_1$  возьмем  $f(z) = -5z$ ,  $\varphi(z) = z^4 + 1$ . На окружности  $|z| = 1$  имеем  $|f(z)| > |\varphi(z)|$ , так как  $|f(z)| = |-5z| = 5$ ,  $|\varphi(z)| = |z^4 + 1| \leq |z^4| + 1 = 2$ . Функция  $f(z) = -5z$  в круге  $|z| < 1$  имеет один нуль, следовательно,  $N_1 = 1$ .

Для нахождения  $N_2$  возьмем  $f(z) = z^4$ ,  $\varphi(z) = 1 - 5z$ . На окружности  $|z| = 2$  имеем  $|f(z)| > |\varphi(z)|$ , так как  $|f(z)| = |z^4| = 2^4 = 16$ ,  $|\varphi(z)| = |1 - 5z| \leq 1 + 5|z| = 11$ . Функция  $f(z) = z^4$  имеет четыре корня в круге  $|z| < 2$ , и, следовательно,  $N_2 = 4$ .

Число корней уравнения (4) в кольце  $1 < |z| < 2$  будет  $N = 4 - 1 = 3$ .

В следующих задачах определить количество корней данных уравнений в указанных кольцах:

$$437. 4z^4 - 29z^2 + 25 = 0, \quad 2 < |z| < 3.$$

$$438. z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$439. z^6 - 8z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 3.$$

Пример 9. Найти число корней уравнения

$$z^2 - ae^z = 0, \quad \text{где } 0 < a < e^{-1},$$

в единичном круге  $|z| < 1$ .

Решение. Положим  $f(z) = z^2$  и  $\varphi(z) = -ae^z$ . На окружности  $|z| = 1$  имеем

$$|f(z)| = |z^2| = 1,$$

$$|\varphi(z)| = |-ae^z| = a |e^z| = a |e^{x+iy}| = ae^x \leq ae < 1$$

в силу условий  $-1 \leq x \leq 1$  и  $0 < a < e^{-1}$ .

Итак,  $|f(z)| > |\varphi(z)|$ , если  $|z| = 1$ . Функция  $f(z) = z^2$  в круге  $|z| < 1$  имеет двукратный корень в начале координат. Следовательно, по теореме Руше исходное уравнение в круге имеет два корня.

Замечание. Рассмотрим действительную функцию  $F(x) = x^2 - ae^x$ . Эта функция на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  непрерывна. Кроме того,

$$F(-1) = 1 - ae^{-1} > 0, \quad \text{так как } 0 < ae^{-1} < e^{-2} < 1,$$

$$F(0) = -a < 0,$$

$$F(1) = 1 - ae > 0, \quad \text{так как } a < e^{-1}.$$

Таким образом, на концах отрезков  $-1 \leq x \leq 0$  и  $0 \leq x \leq 1$  функция  $F(x)$  принимает значения разных знаков. Отсюда следует, что данное уравнение в круге  $|z| < 1$  имеет два действительных корня разных знаков.

В следующих задачах определить число корней данных уравнений в указанных областях:

440.  $e^{z-\lambda} = z$  ( $\lambda > 1$ ),  $|z| < 1$ .

441.  $e^z = az^n$ , где  $n$  — натуральное число и  $|a| > \frac{e^R}{R^n}$ ,  $|z| < R$ .

442.  $z^2 - \cos z = 0$ ,  $|z| < 2$ .

443.  $z^4 - \sin z = 0$ ,  $|z| < \pi$ .

444.  $z^2 + \operatorname{ch} iz = 0$ ,  $|z| < 0,5$ .

445.  $\operatorname{ch} z = z^2 - 4z$ ,  $|z| < 1$ .

446.  $2^z = 4z$ ,  $|z| < 1$ .

Пример 10. Найти число корней уравнения

$$\lambda - z - e^{-z} = 0, \quad \lambda > 1,$$

в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$ .

Решение. Рассмотрим контур, составленный из отрезка  $[-iR, iR]$  и правой полуокружности  $|z| = R$ . Положим  $f(z) = z - \lambda$  и  $\varphi(z) = e^{-z}$ . На отрезке  $[-iR, iR]$ , где  $z = iy$ , имеем

$$|f(z)| = |iy - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + y^2} \geq \sqrt{\lambda^2} = \lambda > 1,$$

$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-iy}| = 1,$$

и следовательно,  $|f(z)| > |\varphi(z)|$ .

На полуокружности  $|z|=R$ , где  $\operatorname{Re} z = x > 0$  при достаточно большом  $R$  ( $R > \lambda + 1$ ), имеем  $|f(z)| > |\varphi(z)|$ , так как

$$|f(z)| = |z - \lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1,$$

$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-x-iy}| = |e^{-x}e^{-iy}| = e^{-x} |e^{-iy}| = e^{-x} \leq 1 \quad (x > 0).$$

По теореме Руше внутри указанного контура при как угодно большом  $R$  данное уравнение имеет столько же корней, сколько их имеет уравнение  $f(z) = z - \lambda = 0$ , т. е. один корень. А значит, и во всей правой полуплоскости данное уравнение имеет единственный корень.

**447.** Показать, что уравнение  $ze^{\lambda-z} = 1$ , где  $\lambda > 1$ , имеет в единичном круге  $|z| \leq 1$  единственный действительный и положительный корень.

**448.** Показать, что уравнение  $1 + z + \alpha z^n = 0$ , где  $n$  — натуральное число, большее единицы, при всяком  $\alpha$  имеет в круге  $|z| \leq 2$ , по крайней мере, один корень.

**449.** Пусть  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  — функции аналитические в некоторой окрестности точки  $a$ ,  $C$  — круг с центром в точке  $a$  такой, что вдоль окружности этого круга имеем

$$|\alpha f(z)| + |\beta \varphi(z)| < r.$$

Показать, что уравнение  $F(z) = z - a - \alpha f(z) - \beta \varphi(z) = 0$  имеет внутри круга  $C$  один и только один корень.

## § 12. Конформные отображения

### 1. Понятие конформного отображения

**О п р е д е л е н и е.** Отображение окрестности точки  $z_0$  на окрестность точки  $w_0$ , осуществляемое функцией  $w = f(z)$ , называется *конформным*, если в точке  $z_0$  оно обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений (рис. 14).

Это означает, что: 1) если при отображении  $w = f(z)$  кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  переходят соответственно в кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , то угол  $\psi$  между касательными  $k_1$  и  $k_2$  к кривым  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке  $z_0$  будет равен углу  $\Phi$  между соответствующими касательными  $K_1$  и  $K_2$  к кривым  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в точке  $w_0$ , т. е.  $\Phi = \psi$ ; 2) если в плоскости комплексного переменного  $z$  возьмем бесконечно малый круг с центром в точке  $z_0$ , то в плоскости  $w$  ему будет соответствовать бесконечно малый круг с центром в точке  $w_0$ . Поэтому говорят, что *конформное отображение обладает свойством консерватизма углов и подобия в малом*.

Если при отображении  $w = f(z)$  углы между соответствующими направлениями равны не только по величине, но и по направлению отсчета, то такое отображение называется конформным отображением первого рода.

Конформное отображение, при котором углы сохраняются только по абсолютной величине, но изменяется направление их отсчета на

противоположное, называется *конформным отображением второго рода*.

Простейшим примером конформного отображения первого рода является отображение  $w=z$ , а отображения второго рода — отображение  $w=\bar{z}$ .

В дальнейшем будем рассматривать только конформные отображения первого рода

Отображение  $w=f(z)$  называется *конформным в области  $D$* , если оно конформно в каждой точке этой области.

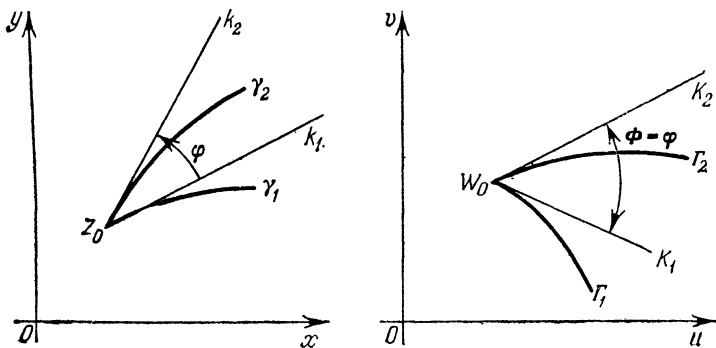


Рис. 14.

**Критерий конформности.** Для того чтобы отображение  $w=f(z)$  было конформным в области  $D$ , необходимо и достаточно, чтобы в этой области функция  $w=f(z)$  была однолистной \*) и аналитической, причем  $f'(z) \neq 0$  для всех  $z \in D$ .

Если не предполагать однолистности  $f(z)$ , то отображение, осуществляемое этой функцией, не будет взаимно однозначным, а тем самым не будет и конформным. Например, функция  $w=z^4$ , заданная в полукольце  $1 \leq |z| \leq 2$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ , является аналитической в нем и, кроме того, всюду в полукольце выполняется условие  $w'=4z^3 \neq 0$ . Однако функция  $w=z^4$  отображает заданное полукольцо на область  $1 \leq |w| \leq 16$ ,  $0 \leq \arg w \leq 4\pi$ , т. е. область, дважды покрывающую соответствующее кольцо на плоскости  $w$ , что и нарушает взаимно однозначное соответствие.

**Пример 1.** В каких областях  $D$  отображения

$$\text{а) } w=2z, \quad \text{б) } w=(z-2)^2$$

являются конформными?

а) Так как функция  $f(z)=2z$  является аналитической и однолистной во всей комплексной плоскости  $z$ , а ее производная  $f'(z)=2 \neq 0$ , то данное отображение является конформным во всей комплексной плоскости.

\*) Функция  $w=f(z)$  называется *однолистной* в области  $D$ , если она в различных точках области  $D$  принимает различные значения.

б) Отображение  $w = (z - 2)^2$  является всюду конформным, кроме точки  $z = 2$ , в которой производная  $f'(z) = 2(z - 2)$  обращается в нуль.

**450.** Указать области конформности для следующих отображений:

а)  $w = e^{-3z}$ ; б)  $w = z^2 - 4z$ ; в)  $w = -iz^2$ ;

г)  $w = \operatorname{sh}(1 - z)$ ; д)  $w = (z + 2i)^3$ .

## II. Общие теоремы теории конформных отображений

1. Теорема Римана. Существует аналитическая функция  $w = f(z)$ , отображающая взаимно однозначно и конформно одну односвязную плоскую область  $D$  на другую  $G$ , если только ни одна из этих областей не совпадает со всей плоскостью с одной исключенной точкой или всей расширенной плоскостью.

Имеется бесконечное множество аналитических функций, осуществляющих отображение области  $D$  на область  $G$ . Единственность отображающей функции  $w = f(z)$  будет обеспечена, если потребовать, чтобы выполнялось одно из условий:

а) заданная точка  $z_0$  области  $D$  перешла в заданную точку  $w_0$  области  $G$ , а линия, выходящая из  $z_0$ , повернулась на данный угол  $\alpha$  ( $w_0 = f(z_0)$ ,  $\arg f'(z_0) = \alpha$ );

б) точка  $z_0$  области  $D$  и точка  $z_1$  границы  $\gamma$  перешли соответственно в точку  $w_0$  области  $G$  и в точку  $w_1$  границы  $\Gamma$  [ $w_0 = f(z_0)$ ,  $w_1 = f(z_1)$ ];

в) три граничные точки  $z_1, z_2, z_3$  области  $D$  перешли в три граничные точки  $w_1, w_2, w_3$  области  $G$  [ $w_1 = f(z_1)$ ,  $w_2 = f(z_2)$ ,  $w_3 = f(z_3)$ ], при этом, если при движении по границе  $\gamma$  от  $z_1$  к  $z_3$  через  $z_2$  область  $D$  остается слева (справа), то при движении по границе  $\Gamma$  от  $w_1$  к  $w_3$  через  $w_2$  область  $G$  также должна оставаться слева (справа).

В случаях б) и в) функция  $f(z)$  предполагается непрерывной в замкнутой области  $D$ .

2. Принцип взаимно однозначного соответствия границ. Пусть область  $D$  ограничена гладким или кусочно гладким контуром  $\gamma$ . Пусть функция  $w = f(z)$ , аналитическая в  $D$  и на  $\gamma$ , отображает контур  $\gamma$  на некоторый контур  $\Gamma$ , ограничивающий область  $G$ , причем когда точка  $z$  обходит контур  $\gamma$  так, что область  $D$  остается слева, соответствующая точка  $w$  обходит контур  $\Gamma$  так, что область  $G$  также остается слева. Тогда область  $D$  с помощью функции  $w = f(z)$  отобразится взаимно однозначно и конформно на область  $G$ .

3. Принцип симметрии. Пусть область  $D$ , содержащая в составе своей границы некоторый прямолинейный отрезок  $\gamma$  (конечной или бесконечной длины), отображается функцией  $w = f(z)$  на область  $G$  так, что  $\gamma$  переходит в прямолинейный отрезок  $\Gamma$ , входящий в границу области (рис. 15). Обозначим соответственно через  $l$  и  $L$  прямые, на которых лежат отрезки  $\gamma$  и  $\Gamma$ . Принцип симметрии утверждает: если функция  $w = f(z)$  аналитична в области  $D$ , а также

во всех внутренних точках граничного отрезка  $\gamma$ , то эта функция аналитична также в области  $D^*$ , симметричной с  $D$  относительно прямой  $l$ , и обладает тем свойством, что любые две точки  $z_1$  и  $z_2$  (из которых одна лежит в  $D$ ), симметричные относительно  $l$ , отображаются в точки  $w_1$  и  $w_2$ , симметричные относительно прямой  $L$ .

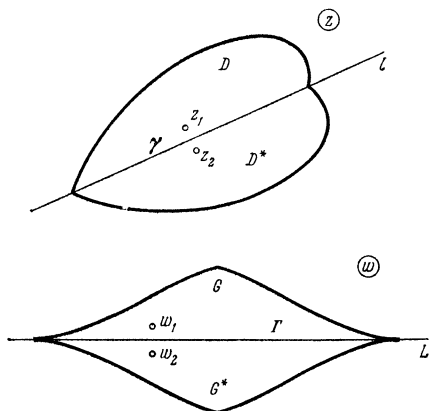


Рис. 15.

**Пример 2.** В области  $D$ , ограниченной контуром  $\gamma$ :

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

задана функция

$$w = 3z + i.$$

В какую область перейдет  $D$  при отображении, осуществляемом этой функцией?

**Решение.** Пусть  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ . Тогда соотношение  $w = 3z + i$  переписывается в виде  $u + iv = 3x + i(3y + 1)$ , так что  $u = 3x$ ,  $v = 3y + 1$ . Отсюда  $x = u/3$ ,  $y = (v - 1)/3$ .

Контур  $\gamma$  отображается в контур  $\Gamma$ :

$$\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \left(\frac{v-1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u}{3} = 0 \quad \text{или} \quad (u-3)^2 + (v-1)^2 = 9,$$

т. е. окружность радиуса 3 с центром в точке  $M(3, 1)$ . Положительное направление обхода контура  $\gamma$  соответствует положительному направлению обхода контура  $\Gamma$ . В этом можно убедиться, задав контуры параметрическими уравнениями:

$$\gamma: x = 1 + \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\Gamma: u = 3 + 3 \cos \varphi, \quad v = 3 \sin \varphi + 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Согласно принципу взаимно однозначного соответствия границ область  $D$  отобразится в область  $G$  — внутренность окружности, ограниченной контуром  $\Gamma$ .

Это можно проверить еще и так: взять любую точку  $z \in D$  и найти ее образ при отображении  $w = 3z + i$ . Например, точка  $z = 1$  переходит в точку  $w = 3 + i$ , которая находится внутри контура  $\Gamma$ .

**Пример 3.** Даны точки  $z_1 = 2 + 3i$  и  $z_2 = 3 + 2i$ , симметричные относительно прямой  $y = x$ . Показать, что функция  $w = e^{-i \frac{\pi}{2}} z$  переводит  $z_1$  и  $z_2$  в точки  $w_1 = 3 - 2i$  и  $w_2 = 2 - 3i$ , симметричные относительно прямой  $y = -x$ .

**Решение.** Нетрудно проверить, что функция  $w = e^{-i \frac{\pi}{2}} z$  отображает прямую  $y = x$  в прямую  $y = -x$ . Функция  $w = e^{-i \frac{\pi}{2}} z$  аналитична всюду. В силу принципа симметрии точки  $z_1 = 3 + 2i$  и  $z_2 = 2 + 3i$ , симметричные относительно прямой  $y = x$ , перейдут в точки  $w_1 = 3 - 2i$  и  $w_2 = 2 - 3i$ , симметричные относительно прямой  $y = -x$ .

**Пример 4.** Показать, что функция  $w = e^{\frac{\pi z}{h}}$  отображает полосу  $0 < \text{Im} z < h$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im} w > 0$ .

**Решение.** Будем проходить границу области  $D$  так, чтобы область  $D$  оставалась при этом слева. Так как

$$w = u + iv = e^{\frac{\pi(x+iy)}{h}} = e^{\frac{\pi x}{h}} e^{\frac{i\pi y}{h}},$$

то, когда точка  $z$  пробегает действительную ось  $Ox$  от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$  (при  $y = 0$ ), соответствующая точка  $w = e^{\frac{\pi x}{h}}$  пробегает действительную положительную полуось  $Ou$  плоскости  $w$  от точки  $u = 0$  до точки  $u = +\infty$ ,  $v = 0$ . Когда точка  $z = x + ih$  пробегает верхнюю границу полосы от точки  $+\infty + ih$  до точки  $-\infty + ih$  (что соответствует изменению  $x$  от  $+\infty$  до  $-\infty$ ), то соответствующая точка  $w = e^{\frac{\pi x}{h}} e^{i\pi} = -e^{\frac{\pi x}{h}}$  пробегает действительную отрицательную полуось  $Ou$

плоскости  $w$  от точки  $-\infty$  до точки  $0$ . Так как функция  $w = e^{\frac{\pi z}{h}}$  аналитична в области  $D$ :  $0 < \text{Im} z < h$  и на ее границе, то она конформно отображает эту область на область  $G$ :  $\text{Im} w > 0$ .

**451.** Показать, что полукольцо  $1 \leq |z| \leq 2$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ , с помощью функции  $w = z^2$  отображается на кольцо  $1 \leq |w| \leq 4$ ,  $0 \leq \arg w \leq 2\pi$ .

**452.** Показать, что угол  $0 < \arg z < \pi/5$ ,  $0 < |z| < +\infty$ , с помощью функции  $w = z^5$  отображается на верхнюю полуплоскость  $\text{Im} w > 0$ , так что точка  $z = 0$  переходит в точку  $w = 0$ .

**453.** Показать, что полоса  $1 \leq y < 1 + 2\pi$  с помощью функции  $w = e^z$  отображается на полную плоскость  $w$  с разрезом вдоль положительной части оси  $Ou$ .



### III. Конформные отображения, осуществляемые линейной

функцией  $w = az + b$ , функцией  $w = \frac{1}{z}$

и дробно-линейной функцией  $w = \frac{az+b}{cz+d}$

1. **Линейная функция.** Линейная функция  $w = az + b$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные комплексные числа ( $a \neq 0$ ), осуществляет конформное отображение всей плоскости  $z$  на всю плоскость  $w$ , так как при любом  $z$  имеем  $w' = a \neq 0$ .

Частные случаи:

$$1. \quad w = z + b \quad (1)$$

осуществляет преобразование параллельного переноса.

$$2. \quad w = e^{i\alpha}z, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — действительное число, осуществляет преобразование поворота вокруг начала координат на угол  $\alpha$ .

$$3. \quad w = rz, \quad (3)$$

где  $r$  — действительное положительное число, осуществляет преобразование подобия с центром подобия в начале координат,  $r$  — коэффициент подобия.

Общий случай линейного отображения

$$w = az + b, \quad \text{где } a = re^{i\alpha}, \quad (4)$$

осуществляется путем последовательного применения: 1) поворота около начала координат на угол  $\alpha$ , 2) преобразования подобия с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия, равным  $r$ , 3) параллельного переноса с помощью вектора, соответствующего комплексному числу  $b$ .

Отметим, что линейное преобразование оставляет неподвижными две точки  $z_1 = \infty$  и  $z_2 = \frac{b}{1-a}$ . При  $a = 1$  получаем  $z_2 = \infty$ , т. е. в этом случае обе неподвижные точки совпадают.

**Пример 5.** Показать, что линейное отображение  $w = az + b$  вполне определяется, если потребовать, чтобы две различные точки  $z_1$  и  $z_2$  переходили соответственно в произвольно заданные, но различные точки  $w_1$  и  $w_2$ .

**Решение.** В самом деле, задание отображения  $w = az + b$  будет осуществлено, если известны значения параметров  $a$  и  $b$ . Покажем, что наши условия позволяют однозначно найти эти параметры. Пусть при  $z = z_1$  получаем  $w = w_1$ , т. е.  $w_1 = az_1 + b$ , а при  $z = z_2$  получаем  $w_2 = az_2 + b$ .

Из этих равенств находим

$$a = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}, \quad b = \frac{w_1 z_2 - w_2 z_1}{z_2 - z_1} \quad (z_1 \neq z_2).$$

Полученные соотношения однозначно определяют параметры  $a$  и  $b$ .

Пример 6. Показать, что линейное отображение (4) можно задать, потребовав, чтобы точка  $z_1$  переходила в точку  $w_1$  и чтобы производная  $\frac{dw}{dz}$  в точке  $z_1$  имела заданное значение  $a$ .

Решение. Чтобы задать отображение (4), надо задать значения параметров  $a$  и  $b$ . Из условия, что точка  $z_1$  должна переходить в точку  $w_1$ , получаем  $w_1 = az_1 + b$ . Вычитая это равенство из (4), получим  $w - w_1 = a(z - z_1)$ . Оче-

видно, что  $\frac{dw}{dz} = a$  при всяком  $z$ .

Поэтому, задав значение производной  $\frac{dw}{dz}$  в точке  $z_1$ , мы определим параметр  $a$ . Линейное отображение  $w - w_1 = a(z - z_1)$  тем самым полностью определено (параметр  $b = w_1 - az_1$ ).

Пример 7. Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках  $0, 1, i$  в плоскости  $z$  на подобный ему треугольник с вершинами  $1+i, 0, 2$  в плоскости  $w$ .

Решение. Первый способ. Из рис. 16 видим, что  $\triangle ABC$  переходит в подобный ему  $\triangle A_1B_1C_1$  путем следующих операций:

1) поворот около начала координат на угол  $\frac{5}{4}\pi$ , что соответствует преобразованию

$$w_1 = e^{i\frac{5}{4}\pi} z;$$

2) преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом  $r = \sqrt{2}$  (так как  $\frac{A_1B_1}{AB} = \sqrt{2}$ ):

$$w_2 = \sqrt{2} w_1;$$

3) параллельный перенос, смещающий точку  $C(0, 0)$  в точку  $C_1(1, 1)$  (получаем  $b = 1 + i$ ):

$$w = w_2 + 1 + i.$$

Учитывая, что  $e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ , получим окончательно

$$w = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) z + 1 + i = (1 - z)(1 + i).$$

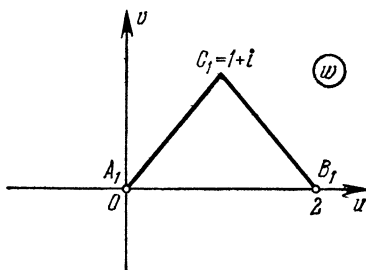
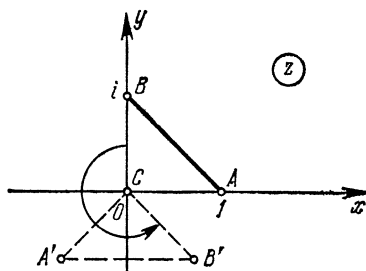


Рис. 16.

Второй способ. Пусть искомая функция есть  $w = az + b$ , где  $a$  и  $b$  — пока неопределенные константы. По условию задачи точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1$  должны перейти соответственно в точки  $w_1 = 1 + i$  и  $w_2 = 0$ . Получаем систему уравнений для определения  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} 1 + i = b, \\ 0 = a + b. \end{cases}$$

Отсюда  $a = -1 - i$ ,  $b = 1 + i$ , а значит,

$$w = (1 + i)(1 - z).$$

454. Указать геометрический смысл (сдвиг, растяжение, поворот) следующих преобразований:

а)  $w = z + 3i$ ; б)  $w = z + 5$ ; в)  $w = iz$ ;

г)  $w = e^{i\frac{\pi}{6}}z$ ; д)  $w = 3z$ ; е)  $w = \frac{1-i}{\sqrt{2}}z$ .

455. Найти общий вид линейных функций, с помощью которых осуществляются преобразования:

а) верхней полуплоскости на себя;

б) верхней полуплоскости на нижнюю полуплоскость;

в) верхней полуплоскости на правую полуплоскость.

456. Найти линейные отображения  $w = az + b$ , оставляющие точку  $z_0$  неподвижной и переводящие точку  $z_1$  в точку  $w_1$ :

а)  $z_0 = 1 - i$ ,  $z_1 = 2 + i$ ,  $w_1 = 4 - 3i$ ;

б)  $z_0 = -i$ ,  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $w_1 = 2 - 3i$ ;

в)  $z_0 = -1 - i$ ,  $z_1 = 3 - 2i$ ,  $w_1 = 3i$ .

457. Найти линейную функцию  $w = f(z)$ , отображающую полосу, заключенную между прямыми  $x = a$ ,  $x = a + h$ , на полосу  $0 < u < 1$  в плоскости ( $w$ ).

2. Функция

$$w = \frac{1}{z}. \quad (5)$$

Точки  $M$  и  $M'$  называются симметричными относительно окружности  $\Gamma$ , если

1) они находятся на одном луче, выходящем из центра окружности;

2) произведение их расстояний от центра окружности равно квадрату радиуса окружности:  $OM \cdot OM' = R^2$  (рис. 17).

Замечание. Точки окружности  $\Gamma$  симметричны самим себе относительно этой окружности.

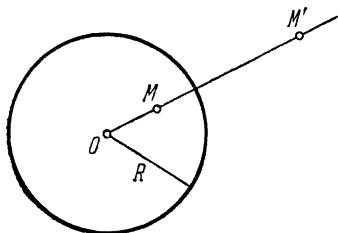


Рис. 17.

Для центра  $O$  окружности  $\Gamma$  симметричной точкой относительно  $\Gamma$  является бесконечно удаленная точка.

Если центр окружности  $\Gamma$  находится в начале координат и одна из симметричных относительно  $\Gamma$  точек изображает комплексное число  $z$ , то другая соответствует комплексному числу  $\frac{R^2}{\bar{z}}$ .

Преобразование  $w = \frac{1}{z}$  состоит из двух симметричных отражений; относительно единичной окружности и относительно действительной оси (рис. 18) и называется *инверсией*.

Преобразование  $w = \frac{1}{z}$  является конформным во всей расширенной плоскости, причем точке  $z=0$  соответствует точка  $w=\infty$ , а точке  $z=\infty$  соответствует точка  $w=0$ . (Считают, что угол между линиями в бесконечно удаленной точке одной из плоскостей ( $z$  или  $w$ ) равен углу между образами этих линий в начале координат другой плоскости.) Окружности (а также прямые) при отображении  $w = \frac{1}{z}$  переходят в окружности или прямые. Неподвижные точки  $z_1 = +1$  и  $z_2 = -1$ .

**Пример 8.** Найти образ окружности  $|z|=3$  при отображении  $w = \frac{25}{z}$ .

**Решение.** Первый способ. Пусть  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ . Тогда соотношение  $w = \frac{25}{z}$  переписывается в виде

$$u + iv = \frac{25}{x + iy} = \frac{25x}{x^2 + y^2} - i \frac{25y}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$u = \frac{25x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{25y}{x^2 + y^2}. \quad (a)$$

Уравнение окружности  $|z|=3$  в декартовых координатах запишется в виде

$$x^2 + y^2 = 9. \quad (b)$$

Исключая из (a) и (b)  $x$  и  $y$ , получим

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2,$$

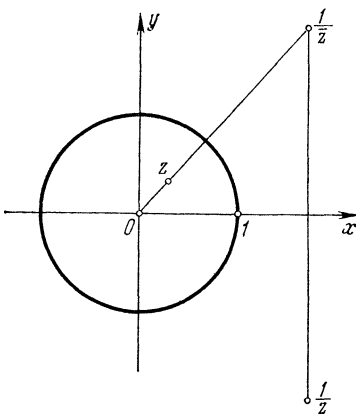


Рис. 18.

т. е. окружность радиуса  $R = \frac{25}{3}$  с центром в начале координат в плоскости  $\omega$ .

Второй способ. Запишем  $z$  и  $\omega$  в показательной форме

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \omega = r e^{i\theta}.$$

Тогда при отображении  $\omega = \frac{25}{z}$  получим

$$r e^{i\theta} = \frac{25}{\rho e^{i\varphi}},$$

откуда  $r = \frac{25}{\rho}$ ,  $\theta = -\varphi$ , где  $\rho = 3$  и  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Значит,

$$\omega = \frac{25}{3} e^{-i\varphi}$$

есть окружность радиуса  $r = 25/3$  с центром в начале координат, проходимая по часовой стрелке, когда исходная окружность проходит против часовой стрелки.

Третий способ. Из равенства  $\omega = 25/z$  имеем  $z = 25/\omega$ . Подставляя это выражение для  $z$  в уравнение окружности  $|z| = 3$  и пользуясь свойством модуля, получим

$$\left| \frac{25}{\omega} \right| = 3 \quad \text{или} \quad \frac{25}{|\omega|} = 3,$$

откуда  $|\omega| = 25/3$ . Следовательно, образом окружности  $|z| = 3$  при отображении  $\omega = 25/z$  будет окружность  $|\omega| = 25/3$ .

**458.** На какую область отображает функция  $\omega = 1/z$  полуполосу

$$0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0?$$

**459.** Найти образы следующих множеств при отображении  $\omega = 1/z$ :

а)  $\arg z = \pi/3$ ; б)  $|z| = 1$ ,  $\frac{\pi}{4} < \arg z < \pi$ ;

в)  $2 \leq x \leq 4$ ,  $y = 0$ ; г)  $-2 < y < -1$ ,  $x = 0$ ;

д)  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ .

3. Дробно-линейная функция

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (6)$$

где  $a, b, c, d$  — комплексные постоянные и  $ad - bc \neq 0$ , взаимно однозначно и конформно отображает расширенную плоскость  $z$  на расширенную плоскость  $\omega$ . Преобразование, осуществляемое дробно-линейной функцией, называется дробно-линейным. Каждое дробно-линейное преобразование может быть получено с помощью последовательного применения линейных преобразований и преобразования вида  $\omega = \frac{1}{z}$ .

Пример 9. Найти условия, при которых дробно-линейная функция (6)

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}$$

отображает верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \omega > 0$ .

Решение. При этом отображении требуется, чтобы граница области  $\text{Im } z > 0$  — ось  $Ox$ , проходящая слева направо, отображалась в границу области  $\text{Im } \omega > 0$ , т. е. в ось  $Ou$ , тоже проходящую слева направо. Таким образом, при любых действительных значениях  $z$  должны быть действительными и значения  $\omega$ . Это, очевидно, возможно лишь при действительных значениях чисел  $a, b, c, d$ . Далее, каждому  $z = x + iy$ , где  $y > 0$ , должно соответствовать такое  $\omega = u + iv$ , у которого  $v > 0$ . Подставив  $z = x + iy$  в формулу (6), получим

$$\omega = u + iv = \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2}{(cx + d)^2 + y^2} + i \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + y^2},$$

откуда

$$v = \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + y^2}.$$

Так как здесь  $y > 0$  и знаменатель положителен, то для положительности  $v$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $ad - bc > 0$ . Это и есть искомое условие.

### Свойства дробно-линейного преобразования

1. Круговое свойство. Дробно-линейное преобразование окружность отображает в окружность. (Прямая линия считается окружностью бесконечного радиуса.)

2. Свойство симметрии. Две точки  $z_1$  и  $z_2$ , симметричные относительно окружности  $C$ , отображаются в точки  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , симметричные относительно окружности  $\Gamma$ , на которую отображается окружность  $C$ .

Следствие. Если при дробно-линейном отображении  $\omega = f(z)$  прямая или окружность  $\gamma$  переходит в окружность  $\Gamma$  и одна из двух точек, симметричных относительно  $\gamma$ , переходит в центр окружности  $\Gamma$ , то другая точка необходимо переходит в бесконечно удаленную точку.

3. Существует единственная дробно-линейная функция, которая три заданные точки  $z_1, z_2, z_3$  плоскости  $z$  переводит в три заданные точки  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  плоскости  $\omega$ . Она имеет вид

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} \cdot \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (7)$$

Пример 10. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки  $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$  в точки  $\omega_1 = -1, \omega_2 = 0, \omega_3 = 1$ .

Решение. Воспользовавшись формулой (7), будем иметь  $\frac{\omega + 1}{\omega - 0} \cdot \frac{1 - 0}{1 - (-1)} = \frac{z - 1}{z - i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - 1}$ , откуда  $\omega = i \frac{i - z}{i + z}$ .

**З а м е ч а н и е.** Если одна из точек  $z_k$  или  $\omega_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) является бесконечно удаленной, то в формуле (7) надо заменить единицами все разности, содержащие эту точку.

**П р и м е р 11.** Найти дробно-линейную функцию, переводящую точку  $z_1$  в точку  $\omega_1=0$ , а точку  $z_2$  в точку  $\omega_2=\infty$ .

**Р е ш е н и е.** Возьмем произвольную точку  $z_3$ , отличную от точек  $z_1$  и  $z_2$ , и предположим, что она переходит в точку  $\omega_3$ , отличную от точек  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Тогда по формуле (7) с учетом замечания будем иметь

$$\frac{\omega-0}{1} \cdot \frac{1}{\omega_3-0} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1},$$

откуда

$$\omega = K \frac{z-z_1}{z-z_2},$$

где

$$K = \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \omega_3, \quad (8)$$

т. е.  $K$  есть произвольное комплексное число,  $K \neq 0$ .

**П р и м е р 12.** Отобразить верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на единичный круг  $|\omega| < 1$  так, чтобы точка  $z_0$  ( $\text{Im } z_0 > 0$ ) перешла в центр  $\omega=0$  круга.

**Р е ш е н и е.** Так как точка  $z_0$  переводится искомой дробно-линейной функцией  $\omega = \omega(z)$  в центр круга, т. е.  $\omega(z_0)=0$ , то сопряженная ей точка  $\bar{z}_0$  должна перейти в точку  $\omega=\infty$  (по свойству симметрии). Далее воспользуемся формулой (8) и получим

$$\omega = K \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0},$$

где  $K$  — постоянный множитель. При любом  $K$  эта функция отображает верхнюю полуплоскость на некоторый круг с центром в точке  $\omega=0$ . Подберем  $K$  так, чтобы круг был единичным. Для этого достаточно погребовать чтобы точка  $z=0$  (граничная точка области  $\text{Im } z > 0$ ) перешла в точку единичной окружности  $|\omega|=1$ . Тогда

$$1 = |\omega| = |K| \cdot \left| \frac{z_0}{\bar{z}_0} \right|, \quad \text{откуда } |K| = 1, \quad \text{так что } K = e^{i\alpha},$$

где  $\alpha$  — любое действительное число. Итак,

$$\omega = e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}. \quad (9)$$

**З а м е ч а н и е.** Найдем производную  $\omega'$  в точке  $z_0 = a + ib$  ( $b > 0$ )

$$\omega'(z_0) = -\frac{ie^{i\alpha}}{2b} \quad \text{или} \quad \omega'(z_0) = \frac{1}{2b} e^{i\alpha} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}}{2b}.$$

Значит,  $\text{arg } \omega'(z_0) = \alpha - \pi/2$ , так что по геометрическому смыслу производной при отображении (9) угол поворота кривых в точке  $z_0$  равен  $\alpha - \pi/2$ .

По теореме Римана существует единственное отображение  $\omega = \omega(z)$  полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на круг  $|\omega| < 1$ , удовлетворяющее условиям

$\omega(z_0) = 0$ ,  $\arg \omega'(z_0) = \alpha - \pi/2$ . Отсюда следует, что всякое дробно-линейное отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на круг  $|\omega| < 1$  имеет вид (9).

**Пример 13.** Отобразить единичный круг  $|z| < 1$  на единичный круг  $|\omega| < 1$ .

**Решение.** Пусть искомое дробно-линейное отображение  $\omega = \omega(z)$  переводит точку  $z_0$ , находящуюся внутри круга  $|z| < 1$ , в центр круга  $|\omega| < 1$ , так что  $\omega(z_0) = 0$ . Тогда точка  $z_0^* = 1/\bar{z}_0$ , симметричная относительно единичной окружности  $|z| = 1$ , перейдет в точку  $\infty$ , т. е.  $\omega(z_0^*) = \infty$ . Тогда по формуле (8) получим

$$\omega = K \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} \quad \text{или} \quad \omega = K_1 \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

где  $K_1 = -K\bar{z}_0$  — некоторое постоянное комплексное число.

Подберем постоянную  $K_1$  так, чтобы круг в плоскости  $\omega$  был единичным. Для этого достаточно потребовать, чтобы точка  $z = 1$  перешла в точку на единичной окружности  $|\omega| = 1$ . Тогда получим

$$1 = |\omega| = |K_1| \cdot \left| \frac{1 - z_0}{1 - z_0\bar{z}_0} \right|,$$

откуда  $|K_1| = 1$ , потому что  $|1 - z_0| = |1 - \bar{z}_0|$ . Следовательно,  $K_1 = e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  — любое действительное число.

Итак,

$$\omega = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \quad (10)$$

где  $|z_0| < 1$ ,  $\alpha$  — любое действительное число.

**З а м е ч а н и е.** Так как

$$\omega'(z) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - z\bar{z}_0}, \quad \text{то} \quad \omega'(z_0) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - |z_0|^2},$$

т. е.  $\arg \omega'(z_0) = \alpha$ . Это означает, что при отображении (10) угол поворота кривых в точке  $z_0$  равен  $\alpha$ .

По теореме Римана существует единственное отображение  $\omega = \omega(z)$  единичного круга  $|z| < 1$  на единичный круг  $|\omega| < 1$ , удовлетворяющее условиям  $\omega(z_0) = 0$ ,  $\arg \omega'(z_0) = \alpha$ .

Следовательно, всякое дробно-линейное отображение единичного круга  $|z| < 1$  на единичный круг  $|\omega| < 1$  имеет вид (10).

**Пример 14.** Найти функцию  $\omega = f(z)$ , отображающую конформно единичный круг на себя и такую, что

$$f\left(\frac{i-1}{2}\right) = 0, \quad \arg f'\left(\frac{i-1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

**Решение.** По формуле

$$\omega = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$$

( $\alpha$  — любое действительное число) получаем отображение единичного круга  $|z| < 1$  на единичный круг  $|\omega| < 1$ , так что точка  $z_0 = \frac{i-1}{2}$



переходит в центр  $\omega = 0$ . Имеем

$$\omega = f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - \frac{i-1}{2}}{1+z \cdot \frac{1+i}{2}} \quad \text{или} \quad f(z) = e^{i\alpha} \frac{2z+1-i}{2+z(1+i)}.$$

Так как

$$f'(z) = e^{i\alpha} \frac{2}{[2+(1+i)z]^2},$$

то

$$f'(z_0) = f' \left( \frac{i-1}{2} \right) = 2e^{i\alpha}.$$

Согласно условию  $\arg f' \left( \frac{i-1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$  получаем  $\arg(2e^{i\alpha}) = \pi/2$ , откуда  $\alpha = \pi/2$ , а потому

$$f(z) = i \frac{2z+1-i}{2+(1+i)z} \quad \text{или} \quad f(z) = \frac{1+(2z+1)i}{2+z(1+i)}.$$

**460.** Найти дробно-линейное преобразование, переводящее действительную ось в единичную окружность.

Найти образы следующих областей при заданных дробно-линейных отображениях:

**461.** Кольцо  $1 < |z| < 2$  при  $\omega = \frac{z+1}{z+2}$ .

**462.** Внешность круга  $|z| > 1$  при  $\omega = \frac{z+i}{z-i}$ .

**463.** Круг  $|z| < 1$  при  $\omega = \frac{z-1}{z+i}$ .

**464.** Определить, во что переходит внутренность круга  $|z| < 1$  при дробно-линейном отображении, которое переводит точки  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = \infty$  соответственно в точки  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \infty$ ,  $\omega_3 = 1$ .

**465.** Найти точки, симметричные с точкой  $z = 1+i$  относительно следующих линий:

а)  $x = 0$ ; б)  $|z| = \sqrt{2}$ ; в)  $|z-1-i| = 2$ .

**466.** Найти общий вид дробно-линейной функции, отображающей:

а) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;

б) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

**467.** Найти отображение верхней полуплоскости на себя, если:

$$\omega(0) = 1, \quad \omega(1) = 2, \quad \omega(2) = \infty.$$

468. Найти отображение на единичный круг  $|\omega| < 1$  верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  так, чтобы

а)  $\omega(i) = 0$ ,  $\arg \omega'(i) = -\pi/2$ ;

б)  $\omega(2i) = 0$ ,  $\arg \omega'(2i) = 0$ .

469. Найти функцию  $\omega = f(z)$ , отображающую верхнюю полуплоскость на единичный круг так, чтобы точки  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1$  переходили в точки  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = i$ ,  $\omega_3 = -1$  окружности.

470. Найти функцию  $\omega = f(z)$ , отображающую круг  $|z| < 1$  на нижнюю полуплоскость так, чтобы точки  $1$ ,  $i$ ,  $-i$  перешли в точки  $1$ ,  $0$ ,  $-1$ .

471. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг  $|z| < 1$  на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  так, чтобы точки  $-1$ ,  $1$ ,  $i$  перешли в точки  $\infty$ ,  $0$ ,  $1$ .

472. Найти конформное отображение круга  $|z| < 5$  в круг  $|\omega| < 1$  так, чтобы точки  $-5$ ,  $4 + 3i$ ,  $5$  перешли в точки  $-1$ ,  $i$ ,  $1$ .

473. Найти функцию  $\omega = f(z)$ , отображающую конформно единичный круг на себя и такую, что

а)  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ;

б)  $f(0) = 0$ ,  $\arg f'(0) = -\frac{\pi}{2}$ .

474. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг  $|z - 2| < 3$  на круг  $|\omega| < 1$  так, чтобы точки  $-1$ ,  $5$ ,  $i\sqrt{5}$  перешли соответственно в точки  $1$ ,  $i$ ,  $-1$ .

475. На какую область в плоскости  $\omega$  отобразит функция  $\omega = i \frac{1-z}{1+z}$  верхний полукруг  $|z| < 1$ ,  $\text{Im } z > 0$ ?

476. Найти образ области  $D$ :  $1 \leq |z| \leq 2$ ,  $0 \leq \arg z \leq \leq \pi/4$  при отображении  $\omega = \frac{1}{z} + 1$ .

#### IV. Конформные отображения, осуществляемые основными элементарными функциями

##### 1. Степенная функция

$$\omega = z^n, \quad (11)$$

где  $n \geq 2$  — целое положительное число.

Отображение, осуществляемое степенной функцией, является конформным во всей плоскости, кроме точки  $z = 0$ : при  $z \neq 0$  имеем  $\omega' = nz^{n-1}$ ; при  $z = 0$   $\omega' = 0$ . При  $z = 0$  конформность нарушается,

так как при отображении с помощью функции (11) углы увеличиваются в  $n$  раз. Угол  $0 < \varphi < 2\pi/n$  функцией (11) отображается взаимно однозначно на всю плоскость  $z$  с разрезом по положительной части действительной оси, причем лучу  $\varphi=0$  соответствует верхний а лучу  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$  — нижний край разреза. Такое же отображение получим для каждого из углов, на которые плоскость  $z$  разбивают лучи  $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$  ( $k$  — целое число), причем при отображении угла  $\frac{2(k-1)\pi}{n} < \varphi < \frac{2k\pi}{n}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) на плоскость с разрезом лучу  $\varphi = \frac{2(k-1)\pi}{n}$  соответствует верхний, а лучу  $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$  — нижний край разреза.

**Пример 15.** Отобразить сектор  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$  на единичный круг  $|\omega| < 1$  так, чтобы точка  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$  перешла в центр  $\omega_1 = 0$ , а точка  $z_2 = 0$  — в точку  $\omega_2 = 1$ .

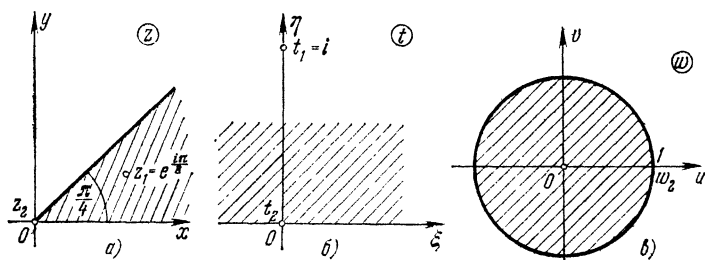


Рис. 19.

**Решение.** Сектор  $0 < \arg z < \pi/4$  (рис. 19, а) с помощью функции  $t = z^4$  отобразим на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  (рис. 19, б). Точка  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$  перейдет в точку  $t_1 = z_1^4 = i$ , а  $z_2 = 0$  перейдет в точку  $t_2 = 0$ .

Затем отобразим полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  на круг  $|\omega| < 1$  так, чтобы точка  $t_1 = i$  перешла в центр круга (рис. 19, в). Воспользовавшись формулой (9), получим

$$\omega = e^{i\varphi} \frac{t-i}{t+i}.$$

Требование, чтобы точка  $t_2 = 0$  перешла в точку  $\omega_2 = 1$ , дает  $e^{i\varphi} = -1$ . Подставляя в выражение для  $\omega$  значение  $e^{i\varphi} = -1$  и  $t = z^4$ , получим окончательно

$$\omega = - \frac{z^4 - i}{z^4 + i}.$$

**Пример 16.** Найти функцию, отображающую верхнюю половину круга  $|z| < 1$ ,  $\text{Im } z > 0$ , на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ .

**Решение.** Заданная область представляет собой двуугольник с вершинами в точках  $z_1 = -1$  и  $z_2 = 1$  и углом при вершине  $\alpha = \pi/2$  (рис. 20, а).

Вспомогательная функция  $t = \frac{1+z}{1-z}$  осуществляет конформное отображение этого двуугольника на первый квадрат плоскости  $t$

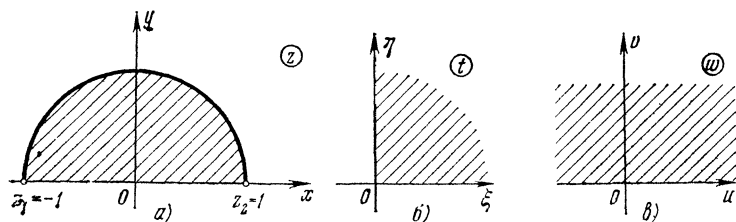


Рис. 20.

(рис. 20, б). Функция  $w = t^2$  или  $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$  дает искомое отображение (рис. 20, в).

**2. Радикал.** Функция  $w = \sqrt[n]{z}$ , обратная к степенной функции  $z = w^n$ , является  $n$ -значной, т. е. каждому  $z = \rho e^{i\varphi}$  ( $z \neq 0$  и  $z \neq \infty$ ) отвечает  $n$  значений  $w$  по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Каждая из функций  $w_k$  есть ветвь многозначной функции  $w = \sqrt[n]{z}$ . Точка  $z=0$  является точкой разветвления этой функции.

На расширенной  $z$ -плоскости с любым разрезом от  $z=0$  до  $z=\infty$ , в частности, с разрезом вдоль положительной части действительной оси, можно выделить  $n$  однозначных ветвей  $w_k$ . Эти ветви однолистно отображают расширенную плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси на секторы

$$\frac{2(k-1)\pi}{n} < \arg w < \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

**Пример 17.** Отобразить верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  с разрезом по отрезку от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = ai$  ( $a > 0$ ) на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  (устранить разрез).

**Решение.** 1) С помощью отображения  $t = z^2$  удвоим углы в начале координат. При этом отрезок  $z_1 z_2$  перейдет в отрезок  $t_1 t_2$  расширенной  $t$ -плоскости от точки  $t_1 = 0$  до точки  $t_2 = -a^2$ , а луч  $\arg z = \pi$  (отрицательная действительная полуось) — в луч  $\arg w = 2\pi$ . Таким образом, исходная область отображилась на расширенную  $t$ -плоскость с разрезом от точки  $t_2 = -a^2$  до точки  $t = +\infty$ .

2) С помощью линейной функции  $\tau = t + a^2$  сдвинем начало разреза в начало координат. Расширенная  $\tau$ -плоскость получается разрезанной от точки  $\tau = 0$  до точки  $\tau = +\infty$ .

3) С помощью функции  $\omega = \sqrt{\tau}$  (точнее, ее ветви, принимающей положительные значения на верхнем берегу разреза) отображаем разрезанную  $\tau$ -плоскость на полуплоскость  $\text{Im } \omega > 0$ . Итак,

$$\omega = \sqrt{\tau} = \sqrt{t + a^2} = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

Найти отображения на верхнюю полуплоскость следующих областей:

477. Плоскости с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$ .

478. Полосы  $0 < x < 1$  с разрезом по лучу  $x = 1/2$ ,  $a \leq y < \infty$  ( $a > 0$ ).

479. Плоскости с разрезами по лучам  $y = 0$ ,  $-\infty < x \leq a$  и  $y = 0$ ,  $b \leq x < +\infty$  ( $a < b$ ).

3. Показательная функция. Отображение, осуществляемое показательной функцией

$$\omega = e^z,$$

конформно во всей плоскости, так как  $\omega' = e^z \neq 0$  во всякой конечной точке плоскости  $z$ .

Если плоскость  $z$  разбить на полосы

$$2k\pi < y < 2(k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

то каждая из этих полос отобразится функцией  $\omega = e^z$  взаимно однозначно на всю плоскость  $\omega$  с разрезом вдоль положительной части

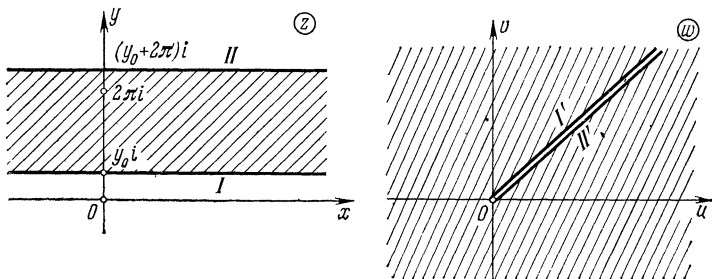


Рис. 21.

действительной оси. При этом считаем, что нижней границе  $y = 2k\pi$  полосы соответствует верхний край разреза, а верхней границе  $y = 2(k+1)\pi$  — нижний край разреза. При этом точки  $z_0 = x_0 + iy_0$  и  $z_k = x_0 + i(y_0 + 2k\pi)$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) переходят в одну и ту же точку плоскости  $\omega$ . Это означает, что показательная функция является бесконечнолистной периодической функцией комплексной переменной  $z$  с мнимым периодом  $2\pi i$ . Областью ее однолиственности является любая полоса  $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$ , отображающаяся на полную плоскость  $\omega$  с разрезом по лучу  $\arg \omega_0 = y_0$  (рис. 21).

Отметим, что показательная функция  $w = e^z$  не обращается в нуль ни при каком значении  $z$ .

Пример 18. Во что преобразуется полуполоса

$$0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad \operatorname{Re} z < 0$$

с помощью функции  $w = e^z$ ?

Решение. Положим  $z = x + iy$ ,  $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = \rho e^{i\varphi}$ . Тогда

$$\rho = e^x, \quad \varphi = y, \quad \text{где } -\infty < x < 0, \quad 0 < y < 2\pi,$$

так что  $0 < \rho < 1$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ . Очевидно, точки  $w = \rho e^{i\varphi}$ , удовлетворяющие этим условиям, заполняют круг  $|w| < 1$  с разрезом по отрезку прямой, соединяющей точки  $w = 0$  и  $w = 1$ . В самом деле,

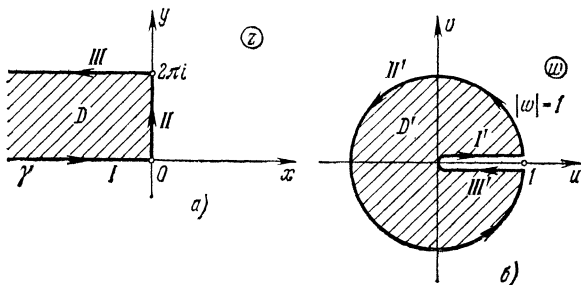


Рис. 22.

обойдем контур  $\gamma$  области  $D$  в положительном направлении, начиная с участка  $I$  ( $-\infty < x < 0$ ,  $y = 0$ ), далее  $II$  ( $x = 0$ ,  $0 < y < 2\pi$ ) и, наконец,  $III$  ( $y = 2\pi$ , а  $x$  изменяется от 0 до  $-\infty$ ). Очевидно, этим участкам в плоскости  $w$  будут соответствовать участки  $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$ , где участок  $I'$  совпадает с верхним краем разреза, а  $III'$  — с нижним краем (рис. 22).

4. Логарифмическая функция

$$w = \operatorname{Ln} z$$

определяется как функция, обратная показательной. Для определенности будем рассматривать главное значение логарифма  $z$ , т. е. то значение, которое соответствует главному значению аргумента

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Эта функция — аналитическая во всех конечных точках  $z \neq 0$  и  $w' = \frac{1}{z} \neq 0$ . Значит, отображение с помощью функции  $w = \operatorname{Ln} z$  конформно во всех таких точках. Отметим, что точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  являются точками разветвления функции  $w = \operatorname{Ln} z$ , причем  $\operatorname{Ln} 0 = \infty$  и  $\operatorname{Ln} \infty = \infty$ .

Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг точки  $z = 0$  не приведет вновь к первоначальной ветви функции  $\operatorname{Ln} z$ . Такие точки разветвления называются логарифмическими.

Пример 19. Найти функцию, отображающую плоскость  $z$  с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси от точки  $z=0$  до точки  $z=-\infty$  на полосу  $-\pi < v < \pi$  в плоскости  $w$ .

Решение. При рассмотрении показательной функции  $w=e^z$  было указано (стр. 132), что любая полоса  $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$  отображается этой функцией на полную плоскость  $w$  с разрезом по лучу  $\arg w_0 = y_0$ .

Рассмотрим обратное отображение, а именно, отображение полосы  $v_0 \leq v < v_0 + 2\pi$ , где  $v_0 = -\pi$ , плоскости  $w$  на всю плоскость  $z$  с разрезом по лучу  $\arg z_0 = v_0 = -\pi$  (рис. 23). Очевидно, такое

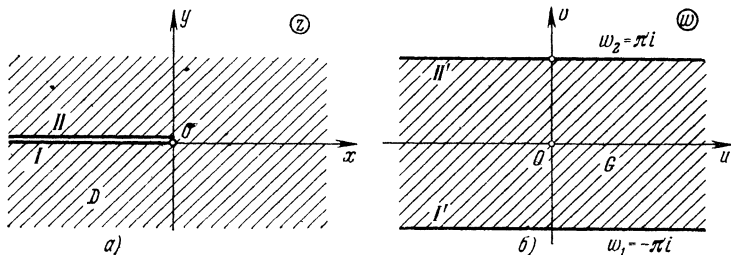


Рис. 23.

отображение дает функция  $z=e^w$ ; следовательно, искомое отображение будет  $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z$ . Когда точка  $z$  пробегает по нижнему берегу разреза  $I$  от  $x=-\infty$  до  $x=0$ , то в плоскости  $w$  соответствующая точка опишет линию  $I'$  от  $u=+\infty$  до  $u=-\infty$  ( $v=-\pi$ ). Далее, когда точка  $z$  пробегает по верхнему берегу разреза  $II$  от  $x=0$  до  $x=-\infty$ , то в плоскости  $w$  соответствующая точка опишет линию  $II'$  от  $u=-\infty$  до  $u=+\infty$  ( $v=\pi$ ), так что область  $D$  и соответствующая ей область  $G$  остаются при обходе контуров справа.

### 5. Тригонометрические функции

$$w = \sin z, \quad w = \cos z.$$

Для любого комплексного  $z$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Пример 20. Во что отображается полуполоса  $0 < x < \pi$ ,  $y > 0$  (рис. 24) с помощью функции  $\cos z$ ?

Решение. Имеем  $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ . Если точка  $z$  пробегает участок границы  $I$  от  $y=+\infty$  до  $y=0$  (при  $x=0$ ), то соответствующая точка в плоскости  $w$  пробегает участок  $I'$  от  $u=+\infty$  до  $u=1$  (при  $v=0$ ). Если точка  $z$  пробегает участок  $II$  от  $x=0$  до  $x=\pi$  (при  $y=0$ ), то  $w = \cos x$  опишет участок  $II'$  от  $u=1$  до  $u=-1$  (при  $v=0$ ). Наконец, если точка  $z$  пробегает участок  $III$  от  $y=0$  до  $y=+\infty$  (при  $x=\pi$ ), то  $w = -\operatorname{ch} y$  пробегает участок  $III'$  от  $u=-1$  до  $u=-\infty$  (при  $v=0$ ). Итак, если точка  $z$  обходит границу полуполосы  $0 < x < \pi$ ,  $y > 0$  так, что полуполоса остается

слева, то точка  $w$  пробегает справа налево всю действительную ось, и поэтому из принципа взаимно однозначного соответствия границ следует, что функция  $w = \cos z$  отображает рассматриваемую полуполосу на нижнюю полуплоскость  $w$ .

Аналогично показывается, что полуполоса  $0 < x < \pi$ ,  $y < 0$  функцией  $w = \cos z$  отображается на верхнюю полуплоскость  $w$ .

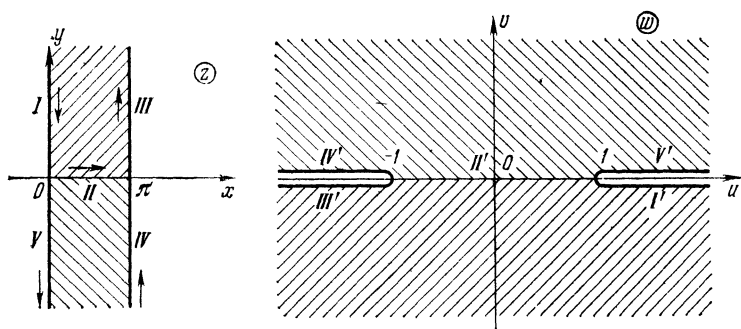


Рис. 24.

Стороне полуполосы  $x = \pi$ ,  $y < 0$  соответствует отрезок  $-\infty < u < -1$  действительной оси плоскости  $w$ , стороне  $0 < x < \pi$ ,  $y = 0$  (проходимой от  $\pi$  к  $0$ ) соответствует отрезок  $-1 < u < 1$  и стороне  $x = 0$ ,  $y < 0$  — отрезок  $1 < u < +\infty$ . Отрезок  $-\infty < u < -1$  действительной оси плоскости  $w$  пробегается дважды, а именно, на него отображается сторона  $x = \pi$ ,  $y > 0$  первой полуполосы и сторона  $x = \pi$ ,  $y < 0$  второй полуполосы. Чтобы отображение  $w = \cos z$  было взаимно однозначным, надо в плоскости  $w$  сделать разрез вдоль действительной оси от  $-\infty$  до  $-1$  (а также от  $1$  до  $+\infty$ ).

Итак, функция  $w = \cos z$  отображает полосу  $0 < x < \pi$  на всю плоскость  $w$  с разрезами по действительной оси от  $-\infty$  до  $-1$  и от  $1$  до  $+\infty$ .

### 6. Функция Жуковского

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (12)$$

является аналитической во всей плоскости, кроме точки  $z = 0$ , где она имеет полюс первого порядка.

Производная функции Жуковского  $w' = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) \neq 0$  при  $z \neq \pm 1$ , а значит, отображение, осуществляемое этой функцией, везде конформно, кроме точек  $z = \pm 1$ . Функция  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  отображает конформно область  $|z| < 1$  на всю плоскость  $w$ , разрезанную по отрезку  $[-1, 1]$  действительной оси. Граница области — окружность  $|z| = 1$  — отображается на этот отрезок, причем верхняя полуокружность отображается на нижний, а нижняя — на верхний край разреза.



Аналогично область  $|z| > 1$  отображается на второй экземпляр плоскости  $w$ , разрезанной по отрезку  $[-1, 1]$  действительной оси, причем верхняя полуокружность  $|z|=1, \operatorname{Im} z > 0$  отображается на верхний берег, а нижняя полуокружность  $|z|=1, \operatorname{Im} z < 0$  — на нижний берег разреза (рис. 25).

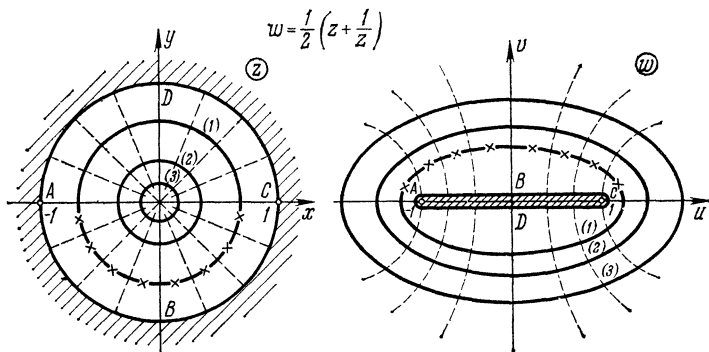


Рис. 25.

Всякая окружность радиуса  $R \neq 1$  отображается функцией (12) в эллипс с полуосями

$$a = \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{R} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left| R - \frac{1}{R} \right|$$

и фокусами в точках  $(-1, 0)$  и  $(1, 0)$ . Лучи  $\arg z = \varphi$  (кроме  $\varphi = 0; \pm \frac{\pi}{2}, \pi$ ) отображаются на соответствующие ветви гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1;$$

лучи  $\arg z = 0, \arg z = \pm \frac{\pi}{2}, \arg z = \pi$  отображаются на дважды пробегаемые бесконечные отрезки действительной или мнимой осей.

Пример 21. Пользуясь функцией Жуковского, найти образ области

$$0 < |z| < 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Подставим  $z = re^{i\varphi}$  в функцию Жуковского

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

и выделим действительную и мнимую части; получим

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases}$$

Обходя контур сектора в положительном направлении  $OABO$  (рис. 26), получим: отрезок  $OA$  перейдет в бесконечный отрезок действительной

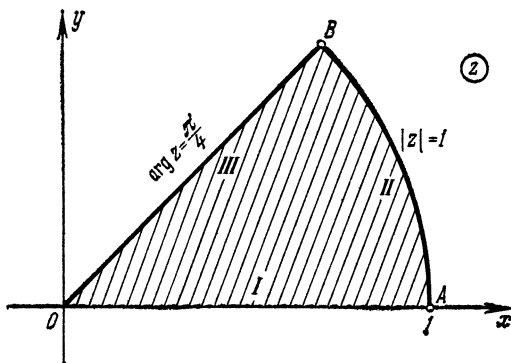


Рис. 26.

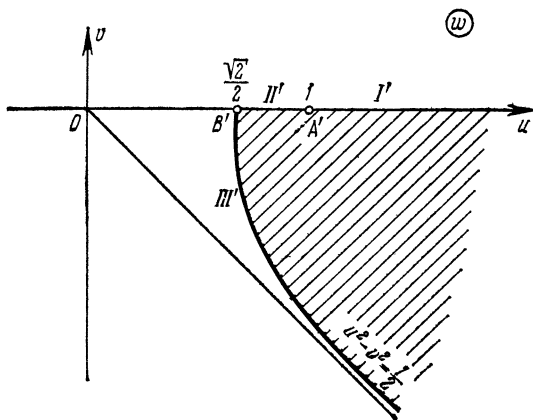


Рис. 27.

оси, пробегаемый от  $u = +\infty$  до  $u = 1$  (рис. 27); дуга  $AB$  окружности  $|z| = 1$  перейдет в отрезок действительной оси  $A'B'$ , а отрезок  $BO$  перейдет в кривую

$$u = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( r + \frac{1}{r} \right), \quad v = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( r - \frac{1}{r} \right)$$

или  $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$  (гипербола).

Согласно принципу взаимно однозначного соответствия границ получим, что заданный сектор переводится функцией Жуковского в область

$$u^2 - v^2 > \frac{1}{2}, \quad u > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad v < 0.$$

**Пример 22.** Отобразить на верхнюю полуплоскость единичный круг с разрезом, идущим от центра по действительной оси.

**Решение.** 1) С помощью функции  $\omega_1 = \sqrt{z}$  отобразим единичный круг на верхний полукруг. При этом верхний берег разреза  $OA$ , т. е. отрезок  $[-1, 0]$ , остается на месте, а нижний берег  $OA'$  перейдет в отрезок  $[-1, 0]$  на плоскости  $W_1$ .

2) С помощью функции

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 + 1}{\omega_1 - 1}$$

отобразим полученную в 1) полуокружность в первый квадрант плоскости  $W_2$ . При этом точка  $\omega_1 = 1$  перейдет в точку  $\omega_2 = \infty$ , а точка  $\omega_1 = -1$  перейдет в точку  $\omega_2 = 0$ .

3) Наконец, с помощью функции  $\omega = \omega_2^2$  отобразим первый квадрант на верхнюю полуплоскость.

Окончательно получаем

$$\omega = \omega_2^2 = \left( \frac{\omega_1 + 1}{\omega_1 - 1} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1} \right)^2.$$

**Пример 23.** Найти функцию, отображающую область, заключенную между двумя окружностями, пересекающимися в действительных точках  $z=a$  и  $z=b$  ( $a < b$ ) под углом  $\lambda\pi$ ,  $0 < \lambda < 1$  (рис. 28), на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \omega > 0$  так, чтобы точка  $z=a$  перешла в точку  $\omega=0$ , а точка  $z=b$  — в точку  $\omega=\infty$ .

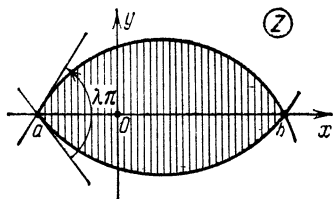


Рис. 28.

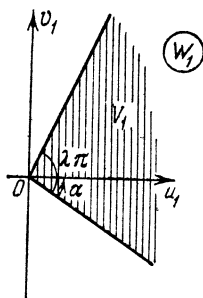


Рис. 29.

**Решение.** 1) Преобразуем лунку  $ab$  в угол величины  $\lambda\pi$ ,  $0 < \lambda < 1$ , так, чтобы точка  $z=a$  перешла в точку  $\omega=0$ , а точка  $z=b$  перешла в точку  $\omega=\infty$ . Это делается с помощью функции  $\omega_1 = \frac{z-a}{b-z}$  (рис. 29).

2) Преобразование  $\omega_2 = \omega_1 e^{i\alpha}$  поворачивает угол  $V_1$  раствора  $\lambda\pi$  против часовой стрелки на угол  $\alpha$ . Таким образом, в плоскости  $W_2$  мы получаем угол  $V_2$  того же раствора, что и угол  $V_1$  (рис. 30).

3) Преобразование  $\omega = \omega_2^{1/\lambda}$  переводит угол  $V_2$  в полуплоскость. Таким образом, искомое преобразование имеет вид

$$\omega = c \left( \frac{z-a}{b-z} \right)^{1/\lambda},$$

где  $c$  — некоторая комплексная постоянная, которая выбирается так, чтобы отображение осуществлялось на верхнюю полуплоскость.

**Пример 24.** Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость область  $D: |z| < 2, |z-1| > 1$  (рис. 31).

**Решение.** 1) Функция

$$\omega_1 = \frac{z}{z-2} \tag{13}$$

отображает заданную область в полосу  $\Pi_1: \left\{ 0 < u < \frac{1}{2}, -\infty < v < +\infty \right\}$ . Действительно, положив

$z = 2e^{i\varphi}$ , получим

$$\omega_1 = u + iv = \frac{2e^{i\varphi}}{2e^{i\varphi} - 2} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - 1} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Отделяя действительную и мнимую части, будем иметь

$$u = \frac{1}{2}, \quad v = -\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

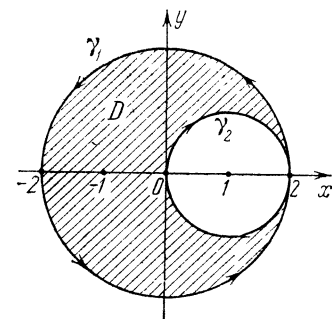


Рис. 31.

Таким образом, окружность  $|z|=2$  преобразуется функцией  $\omega_1 = \frac{z}{z-2}$  в прямую

$$u = \frac{1}{2}, \quad v = -\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}},$$

пробегаемую снизу вверх (рис. 32). В частности, точки  $z_1=2i$ ,  $z_2=-2$  и  $z_3=-2i$  перейдут в точки  $\omega = \frac{1-i}{2}$ ,  $\omega = \frac{1}{2}$  и  $\omega = \frac{1+i}{2}$ . Эта же функция переводит окружность  $|z-1|=1$  в прямую  $u=0$ ,

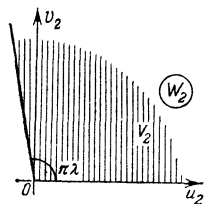


Рис. 30.

$-\infty < v < +\infty$ . В самом деле, подставляя в (13) значение  $z = 1 + e^{i\varphi}$ , получим

$$\omega_1 = u_1 + iv_1 = \frac{e^{i\varphi} + 1}{e^{i\varphi} - 1} = -i \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

откуда

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

где  $\varphi$  изменяется от  $2\pi$  до  $0$ . Значит, когда точка  $z$  пробегает окружность  $\gamma_2$ , то соответствующая точка  $\omega_1$  пробегает прямую  $\Gamma_2$  (ось  $v_1$  на плоскости  $W_1$ ) сверху вниз.

При отображении  $\omega_1 = \frac{z}{z-2}$  внутренняя точка  $z = -1$  области  $D$  переходит во внутреннюю точку

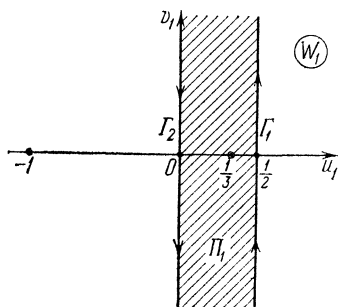


Рис. 32.

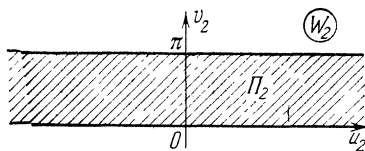


Рис. 33.

$\omega_1 = \frac{1}{3}$  полосы  $\Pi_1$  (рис. 32). Следовательно, функция  $\omega_1 = \frac{z}{z-2}$  осуществляет отображение области  $D$  на полосу  $\Pi_1$ .

2) Функция  $\omega_2 = 2\pi i \omega_1$  переводит вертикальную полосу

$$\Pi_1 : \left\{ 0 < u_1 < \frac{1}{2}, \quad -\infty < v_1 < +\infty \right\}$$

в горизонтальную полосу

$$\Pi_2 : \{ -\infty < u_2 < +\infty, \quad 0 < v_2 < \pi \} \quad (\text{рис. 33}).$$

3) Функция  $w = e^{\omega_2}$  полосу  $\Pi_2$  переводит в верхнюю полуплоскость плоскости  $W$ .

Итак, окончательно получаем

$$w = e^{\omega_2} = e^{2\pi i \omega_1} = e^{2\pi i \frac{z}{z-2}}.$$

**480.** Найти функцию, отображающую единичный круг на плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси.

**481.** Найти функцию, отображающую угол между лучами

$$z = z_0 + e^{i\varphi_1 t}, \quad z = z_0 + e^{i\varphi_2 t},$$

где  $t \geq 0$ ,  $0 < \varphi_1 < \varphi_2$ , на верхнюю полуплоскость.

**482.** Найти функцию, отображающую горизонтальную полосу  $\{0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq \pi\}$  на верхний полукруг  $|z| < 1$ .

**483.** Отобразить на верхнюю полуплоскость полуполосу  $\{0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq \pi\}$ .

**484.** На что отображает функция  $w = \ln z$  полукольцо  $\{r \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$  в плоскости  $z$ ?

**485.** Найти функцию, отображающую область  $\pi/2 < \arg z < \pi$  на область  $0 < \arg w < \pi/4$ .

**486.** Отобразить плоскость с прямолинейным разрезом по вещественной оси  $0 < a < x < b$  на верхнюю полуплоскость  $w$ .

**487.** Отобразить плоскость  $z$  с прямолинейными разрезами  $(-\infty, b)$ ,  $(a, +\infty)$ , где  $a$  и  $b$  вещественны,  $b < a$ , на полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ .

**488.** Найти функцию, отображающую первый квадрант  $0 \leq \arg z \leq \pi/2$  на круг  $|w| < 1$  так, чтобы точкам  $z = 1 + i$ ,  $z = 0$  отвечали точки  $w = 0$ ,  $w = 1$ .

В следующих задачах найти область плоскости  $w$ , на которую функция  $w = f(z)$  отображает данную область  $D$  плоскости  $z$ :

**489.**  $w = z^2 + 1$ ,  $D$ : четверть круга  $|z| < 1$ ,  $0 < \arg z < \pi/2$ .

**490.**  $w = e^{2z}$ ,  $D$ : полуполоса  $0 < \text{Im } z < \pi/4$ ,  $\text{Re } z < 0$ .

**491.**  $w = \ln z + 1$ ,  $D$ : часть кругового кольца  $1 < |z| < e$ , заключенная в угле  $0 < \arg z < e$ .

Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость каждую из указанных областей:

**492.** Сектор  $|z| < 2$ ,  $0 < \arg z < \pi/4$ .

**493.** Полосу  $a < \text{Re } z < b$ ,  $a > 0$ .

Найти функции, отображающие:

**494.** Круг  $|z| < 1$  с разрезом по радиусу от точки  $z = 0$  до точки  $z = -1$  на полуполосу  $-\pi < v < \pi$ ,  $u < 0$ .

**495.** Полуполосу  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$  на полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ .

**496.** Полосу  $-\infty < \text{Re } z < +\infty$ ,  $0 < \text{Im } z < \pi/2$  на плоскость  $w$  с разрезами  $-\infty < u \leq -1$ ,  $v = 0$  и  $1 \leq u < +\infty$ ,  $v = 0$ .

497. Лунку, ограниченную окружностями  $|z-1|=1$ ,  $|z-2|=2$ , на полосу  $0 < \operatorname{Re} w < 1$ .

498. Найти дробно-линейную функцию, отображающую область  $D: \{|z+1| > 1; |z+2| < 2\}$  на полосу  $P: \{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$ .

499. Найти функцию, отображающую лунку между двумя окружностями  $|z-1|=1$ ,  $|z+i|=1$  на полуплоскость  $\operatorname{Re} w > 0$ .

500. Используя функцию Жуковского, найти функцию, отображающую кольцо  $1 < |z| \leq 2$  на область  $\frac{u^2}{25} + \frac{v^2}{9} \leq 1$  с разрезом  $-4 \leq u \leq 4$ ,  $v = 0$ .

501. Отобразить верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  с исключенным полукругом  $|z| < 1/2$  в круг  $|\omega| < 1$ .

502. Найти конформное отображение сектора  $0 < \arg z < \pi/8$  на единичный круг  $|\omega| < 1$  так, чтобы точка  $z_1 = e^{i\pi/16}$  перешла в центр  $\omega_1 = 0$ , а точка  $z = 0$  перешла в точку  $\omega = 1$ .

503. Отобразить полосу  $0 < x < \pi/4$  на первый квадрант  $0 < \arg w < \pi/2$ .

504. Найти области, в которые функция  $w = \operatorname{tg} z$  переводит:

а) полосу  $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$ ; б) полосу  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ .

### § 13. Комплексный потенциал. Его гидродинамический смысл

Пусть дано стационарное плоское векторное поле

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  — орты координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Так как точка  $(x, y)$  в плоскости  $xOy$  и ее радиус-вектор  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  являются изображением комплексного числа  $z = x + iy$ , где  $i$  — мнимая единица, то вектор  $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  в свою очередь будет являться изображением комплексного числа  $P(x, y) + iQ(x, y)$ . Поэтому вектор  $\mathbf{a}$  наряду с (1) можно записать в виде

$$\mathbf{a} = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Следовательно, векторное поле (1) можно задать, указав две действительные функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  двух действительных переменных  $x$  и  $y$  или одну функцию комплексного переменного  $z$

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Приложение функций комплексного переменного к гидродинамике

Стационарное безвихревое плоское течение несжимаемой жидкости полностью характеризуется аналитической функцией  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , которая называется *комплексным потенциалом* или *характеристической функцией течения*. Действительная часть  $u(x, y)$  и мнимая часть  $v(x, y)$  называются соответственно *потенциальной функцией* и *функцией тока*.

Линии  $u(x, y) = \text{const}$  называются *экипотенциальными линиями* или *линиями уровня*. Линии  $v(x, y) = \text{const}$  называются *линиями тока*.

Каждая частица жидкости движется по линии тока.

Известно, что скорость  $V$  течения жидкости, задаваемого функцией  $f(z)$  в любой точке  $z = x + iy$ , определяется как по величине, так и по направлению комплексным числом

$$V = Ve^{i\varphi} = V_{Ox} + iV_{Oy} = \overline{f'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y},$$

т. е. числом, сопряженным со значением производной комплексного потенциала в точке  $z$ . Величина скорости равна

$$V = |V| = |\overline{f'(z)}| = |f'(z)|,$$

а направление вектора скорости  $V$  образует с положительным направлением оси  $Ox$  угол

$$\varphi = \arg \overline{f'(z)} = -\arg f'(z).$$

Проекции  $V_{Ox}$  и  $V_{Oy}$  вектора скорости  $V$  на оси координат  $Ox$  и  $Oy$  равны

$$V_{Ox} = \text{пр}_{Ox} V = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad V_{Oy} = \text{пр}_{Oy} V = \frac{\partial u}{\partial y}$$

или, в силу условий Коши — Римана,

$$V_{Ox} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad V_{Oy} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что

$$V = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Будем считать, что координаты  $V_{Ox} = V_{Ox}(x, y)$  и  $V_{Oy} = V_{Oy}(x, y)$  вектора скорости  $V$  в области их определения являются непрерывно дифференцируемыми функциями, за исключением, быть может, конечного числа точек.

**О п р е д е л е н и е.** *Циркуляцией вектора скорости  $V$  вдоль замкнутой кривой  $L$ , обход которой совершается в положительном направлении, называется величина*

$$\Gamma_L = \oint_L V_{Ox} dx + V_{Oy} dy = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy.$$

Циркуляция  $\Gamma_L$  характеризует степень завихренности течения жидкости. Здесь предполагается, что кривая  $L$  не содержит особых точек скорости  $V$ , а внутри  $L$  их может быть конечное число.



О п р е д е л е н и е. *Потоком вектора скорости  $V$  через замкнутую кривую  $L$  называется величина*

$$N_L = \oint_L V_{Ox} dy - V_{Oy} dx = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \oint_L \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Кривая  $L$  обходится в положительном направлении, т. е. при обходе  $L$  область, ограниченная ею, остается слева (здесь берется внешняя нормаль к замкнутой кривой  $L$ ). Предполагается, что кривая  $L$  не проходит через особые точки скорости  $V$ , т. е. производной  $f'(z)$ .

Поток  $N_L$  вектора скорости  $V$  определяет количество жидкости, протекающей через линию  $L$  за единицу времени.

Формулы для циркуляции  $\Gamma_L$  и потока  $N_L$  вектора скорости  $V$  объединяются в одну формулу

$$\Gamma_L + iN_L = \oint_L f'(z) dz, \quad (2)$$

позволяющую находить циркуляцию и поток с помощью вычетов. В том случае, когда производная  $f'(z)$  (а значит, и скорость  $V = \overline{f'(z)}$ ) имеет конечное число особых точек  $z_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ),

$$\Gamma_L + iN_L = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f'(z_k).$$

Точки, в которых  $V=0$ , а значит, и  $f'(z)=0$ , называются *критическими точками* течения.

**Пример 1.** Движение жидкости задается комплексным потенциалом  $f(z) = z^2$ . Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, величину и направление вектора скорости  $V$ , проекции вектора скорости  $V_{Ox}$  и  $V_{Oy}$  на оси координат  $Ox$  и  $Oy$ .

**Решение.** Полагая  $z = x + iy$ , имеем

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i2xy,$$

откуда потенциал скоростей  $u(x, y) = x^2 - y^2$  и функция тока  $v(x, y) = 2xy$ . Линии уровня  $u(x, y) = \text{const}$  — гиперболы  $x^2 - y^2 = \text{const}$ . Линии тока  $v(x, y) = \text{const}$  — гиперболы  $xy = \text{const}$ . Величина вектора скорости

$$V = |\overline{f'(z)}| = |2z| = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Направление вектора скорости определяется углом

$$\varphi = -\arg f'(z) = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Проекции вектора скорости на координатные оси  $Ox$  и  $Oy$

$$V_{Ox} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad V_{Oy} = \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

Начало координат  $O(0, 0)$  является точкой покоя жидкости.

**Пример 2.** Движение жидкости задается комплексным потенциалом  $f(z) = \ln \operatorname{sh} \pi z$ . Найти величину потока  $N_L$  через окружность  $2|z| = 3$  и циркуляцию  $\Gamma_L$  по ней.

Решение. Находим производную комплексного потенциала;

$$f'(z) = \pi \operatorname{cth} \pi z.$$

Применяя формулу (2), получим

$$\Gamma_L + iN_L = \pi \int_{|z|=3/2} \operatorname{cth} \pi z \, dz = \pi \int_{|z|=3/2} \frac{\operatorname{ch} \pi z}{\operatorname{sh} \pi z} \, dz.$$

Подынтегральная функция имеет внутри окружности  $2|z|=3$  три простых полюса:  $z_1 = -i$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = i$ . Ее вычеты в этих полюсах равны

$$\operatorname{res} f'(z_k) = \pi \frac{1}{\pi} = 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$\int_{|z|=3/2} \operatorname{cth} \pi z \, dz = 6\pi i.$$

Следовательно,

$$\Gamma_L + iN_L = 6\pi^2 i.$$

Отсюда циркуляция  $\Gamma_L = 0$ , поток  $N_L = 6\pi^2$ .

Пример 3. Найти комплексный потенциал  $f(z)$  течения жидкости, если известны уравнение эквипотенциальных линий

$$\operatorname{ch} x \sin y + 2xy = c,$$

где  $c = \text{const}$  и  $f(0) = 0$ .

Решение. Из условия следует, что потенциальная функция  $u(x, y)$ , т. е. действительная часть аналитической функции  $f(z)$  — искомого комплексного потенциала, — равна

$$u = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y$$

и вопрос сводится к восстановлению аналитической функции по ее действительной части.

Найдем функцию  $f(z)$ , зная ее действительную часть  $u(x, y)$ . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + \operatorname{sh} x \sin y.$$

По первому из условий Коши — Римана  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ , так что

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y + \operatorname{sh} x \sin y.$$

Отсюда находим

$$v(x, y) = y^2 - \operatorname{sh} x \cos y + \varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — произвольная дифференцируемая функция. Дифференцируя  $v(x, y)$  по  $x$  и используя второе из условий Коши — Римана, найдем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{ch} x \cos y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - \operatorname{ch} x \cos y,$$

откуда  $\varphi'(x) = -2x$ , а значит,  $\varphi(x) = -x^2 + c$ ,  $c = \text{const}$ . Итак,

$$v(x, y) = y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y + c.$$

Следовательно,

$$f(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y) + ic.$$

Из условия  $f(0) = 0$  находим:  $0 + i0 = c$ ,  $c = 0$ .

Таким образом, искомый комплексный потенциал

$$f(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \sin y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y)$$

или

$$f(z) = -i(z^2 + \operatorname{sh} z).$$

Течение жидкости определяется комплексным потенциалом. Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, величину и направление вектора скорости, проекции скорости на оси координат.

505.  $f(z) = z^2 + 2z + 2.$

506.  $f(z) = \frac{1}{z^2}.$

507.  $f(z) = \ln(z - 1).$

508. Построить комплексный потенциал течения жидкости, если известно уравнение линий уровня

$$x^2 - y^2 + 2xy + x = \operatorname{const} \quad \text{и} \quad f(0) = 0.$$

509. Построить комплексный потенциал течения жидкости, если известно уравнение линий тока

$$\cos x \operatorname{sh} y = \operatorname{const} \quad \text{и} \quad f(0) = 0.$$

510. Найти циркуляцию по окружности  $|z \pm a| = a$ , если известен комплексный потенциал течения жидкости

$$f(z) = 5i \ln(z^2 - a^2).$$

### § 14. Нахождение изображений и оригиналов

*Функцией-оригиналом* называется любая комплекснозначная функция  $f(t)$  действительного аргумента  $t$ , удовлетворяющая условиям:

1°.  $f(t)$  интегрируема на любом конечном интервале оси  $t$  (локально интегрируема).

2°. Для всех отрицательных  $t$

$$f(t) = 0.$$

3°.  $|f(t)|$  возрастает при  $t \rightarrow +\infty$  не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные  $M > 0$  и  $s$ , что для всех  $t$

$$|f(t)| \leqslant M e^{st}. \quad (1)$$

Нижняя грань  $s_0$  всех чисел  $s$ , для которых справедливо неравенство (1), называется показателем роста функции  $f(t)$ .

Пример 1. Показать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} \sin 3t, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

является функцией-оригиналом.

Действительно, функция  $f(t)$  локально интегрируема:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{2t} \sin 3t dt$$

существует для любых конечных  $t_1$  и  $t_2$ .

Условие 2° выполнено в силу задания функции.

Наконец, для любых вещественных  $t$

$$|e^{2t} \sin 3t| \leqslant e^{2t},$$

так что в качестве  $M$  в условии 3° можно взять любое число  $\geqslant 1$ ;  $s_0 = 2$ .

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая единичная функция Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\varphi(t) \eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

так что если  $\varphi(t)$  удовлетворяет условиям 1° и 3°, то  $\varphi(t)\eta(t)$  удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функции-оригиналы.

**511.** Проверить, какие из указанных функций являются функциями-оригиналами:

а)  $f(t) = b^t \eta(t)$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ ; б)  $f(t) = e^{(2+4i)t} \eta(t)$ ;

в)  $f(t) = \frac{1}{t-3} \eta(t)$ ; г)  $f(t) = t^2 \eta(t)$ ;

д)  $f(t) = \operatorname{ch}(3-i)t \eta(t)$ ; е)  $f(t) = \operatorname{tg} t \eta(t)$ ;

ж)  $f(t) = t^t \eta(t)$ ; з)  $f(t) = e^{-t} \cos t \eta(t)$ ;

и)  $f(t) = e^{t^2} \eta(t)$ ; к)  $f(t) = e^{-t^2} \eta(t)$ ;

л)  $f(t) = \frac{1}{t^2+2} \eta(t)$ ; м)  $f(t) = \eta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta(t-k)$ .

В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, писать  $f(t)$  вместо  $f(t)\eta(t)$ , считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных  $t$ .

Изображением функции  $f(t)$  по Лапласу называется функция  $F(p)$  комплексного переменного  $p = s + i\sigma$ , определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (2)$$

Тот факт, что  $F(p)$  есть изображение  $f(t)$ , будем символически записывать так:

$$f(t) \doteq F(p).$$

Функция  $F(p)$  определена в полуплоскости  $\operatorname{Re} p = -s > s_0$  и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

**Пример 2.** Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t) = e^{2t}.$$

**Решение.** Для функции  $f(t) = e^{2t}$  имеем  $s_0 = 2$ . Поэтому изображение  $F(p)$  будет во всяком случае определено и аналитично в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 2$ . Имеем

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{2t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-2)t} dt = \\ &= \frac{1}{-(p-2)} e^{-(p-2)t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p-2} \quad (\operatorname{Re} p = s > 2). \end{aligned}$$

Итак,  $F(p) = \frac{1}{p-2}$ . Эта функция аналитична при  $\operatorname{Re} p > 2$ , и, кроме того, она аналитична всюду, за исключением точки  $p = 2$ . Это не противоречит сформулированному выше утверждению, так как последнее гарантирует аналитичность  $F(p)$  при  $\operatorname{Re} p > s_0$ , но вовсе не утверждает, что если  $\operatorname{Re} p < s_0$ , то  $F(p)$  всюду неаналитична.

Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

$$512. f(t) = t. \quad 513. f(t) = \sin 3t.$$

$$514. f(t) = te^t. \quad 515. f(t) = t^\alpha \quad (\alpha > -1).$$

516. Может ли функция  $\varphi(p) = \frac{1}{\cos p}$  служить изображением некоторого оригинала?

Свойства преобразования Лапласа

Теорема единственности. Преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p't} f(t) dt$$

единственно в том смысле, что две функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают во всех точках непрерывности для всех  $t > 0$ .

Различные разрывные функции могут иметь одинаковое преобразование Лапласа (читателю предлагается построить пример такой функции).

I. Свойство линейности. Для любых комплексных постоянных  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$$

(здесь и всюду в дальнейшем считаем  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $g(t) \doteq G(p)$ ).

Найти изображение функций:

$$517. 1 + t. \quad 518. 2 \sin t - \cos t. \quad 519. t + \frac{1}{2} e^{-t}.$$

II. Теорема подобия. Для любого постоянного  $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций:

$$520. f(t) = e^{at}. \quad 521. f(t) = \sin 4t.$$

$$522. а) f(t) = \cos \omega t; \quad б) f(t) = \operatorname{sh} 3t.$$

523. Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ . Найти изображение функции  $f\left(\frac{t}{a}\right)$  ( $a > 0$ ) непосредственно и с помощью теоремы подобия.

Пользуясь теоремами линейности и подобия, найти изображения следующих функций:

$$524. f(t) = \sin^2 t. \quad 525. f(t) = \sin mt \cos nt.$$

$$526. f(t) = \cos^3 t. \quad 527. f(t) = \sin mt \sin nt.$$

$$528. f(t) = \sin^4 t. \quad 529. f(t) = \cos mt \cos nt.$$

III. Дифференцирование оригинала. Если функции  $f(t)$ ,  $f'(t)$ , ...,  $f^{(n)}(t)$  являются функциями-оригиналами и  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \doteq p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

где под  $f^{(k)}(0)$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) понимается  $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$ .

Пример 3. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции  $f(t) = \sin^2 t$ .

Решение. Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ . Тогда

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Но  $f(0) = 0$ , а  $f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \doteq \frac{2}{p^2 + 4}$ . Следовательно,

$\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p)$ , откуда

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \doteq \sin^2 t.$$

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение следующих функций:

530.  $f(t) = \cos^2 t$ .      531.  $f(t) = \sin^3 t$ .

532.  $f(t) = t \sin \omega t$ .      533.  $f(t) = \cos^4 t$ .

534.  $f(t) = t \cos \omega t$ .      535.  $f(t) = te^t$ .

IV. Дифференцирование изображения. Дифференцирование изображения сводится к умножению на  $(-t)$  оригинала

$$F'(p) \doteq -t f(t)$$

или, вообще,

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t).$$

Пример 4. Найти изображение функции

$$f(t) = t^2 e^t.$$

Решение. Имеем  $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$ . По теореме о дифференцировании изображения  $\left(\frac{1}{p-1}\right)' \doteq -te^t$ , откуда  $\frac{1}{(p-1)^2} \doteq te^t$ . Далее

$$\left[\frac{1}{(p-1)^2}\right]' \doteq -t(te^t) \quad \text{или} \quad \frac{2!}{(p-1)^3} \doteq t^2 e^t.$$

Найти изображения следующих функций:

536.  $f(t) = t^2 \cos t$ .      537.  $f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t)$ .

538.  $f(t) = (t+1) \sin 2t$ .      539.  $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$ .

V. Интегрирование оригинала. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на  $p$ , т. е. если  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 5. Найти изображение функции  $\int_0^t e^{\tau} d\tau$ .

Решение. Имеем  $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$ . По теореме об интегрировании

оригинала  $\int_0^t e^{\tau} d\tau \doteq \frac{\frac{1}{p-1}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}$ .

Найти изображения следующих функций:

$$540. f(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau. \quad 541. f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau d\tau.$$

$$542. f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau. \quad 543. f(t) = \int_0^t \cos^2 \omega \tau d\tau.$$

$$544. f(t) = \int_0^t \operatorname{ch} \omega \tau d\tau. \quad 545. f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau.$$

VI. Интегрирование изображения. Если интеграл  $\int_p^{\infty} F(p) dp$  сходится, то он служит изображением функции  $\frac{f(t)}{t}$ :

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} F(p) dp.$$

Пример 6. Найти изображение функции  $\frac{\sin t}{t}$ .

Решение. Как известно,  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$ . Поэтому

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p$$

(для многозначных функций  $\operatorname{Ln} z$ ,  $\operatorname{Arctg} z$  и т. д. берем их главные ветви, для которых  $\operatorname{Ln} 1 = 0$ ,  $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$  и т. д.).

Найти изображения следующих функций:

$$546. \text{ а) } \frac{e^t - 1}{t}; \quad \text{ б) } \frac{1 - e^{-t}}{t}; \quad \text{ в) } \frac{\sin^2 t}{t}.$$



$$547. \text{ а) } \frac{1 - \cos t}{t}; \quad \text{ б) } \frac{\cos t - \cos 2t}{t}.$$

$$548. \text{ а) } \frac{e^t - 1 - t}{t}; \quad \text{ б) } \frac{e^t - e^{-t}}{t}.$$

С помощью теоремы об интегрировании изображения легко вычисляются некоторые несобственные интегралы.

Пусть  $f(t) \doteq F(p)$  и пусть сходится несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt. \text{ Тогда}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(p) dp, \quad (3)$$

где интеграл справа можно вычислять по положительной полуоси.

**Пример 7.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

**Решение.** Имеем  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$ . По формуле (3)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Вычислить интегралы:

$$549. \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \quad (a > 0, b > 0).$$

$$550. \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin at}{t} dt \quad (\alpha > 0, a > 0).$$

$$551. \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \sin mt dt \quad (\alpha > 0, \beta > 0, m > 0).$$

$$552. \int_0^{\infty} \frac{Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + De^{-\delta t}}{t} dt$$

$$(A + B + C + D = 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0).$$

$$553. \int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt \quad (a > 0, b > 0).$$

$$554. \int_0^{\infty} \frac{\sin at \sin bt}{t} dt \quad (a > 0, b > 0).$$

VII. Теорема смещения. Если  $f(t) \doteq F(p)$ , то для любого комплексного  $p_0$

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p - p_0). \quad (4)$$

Пример 8. Найти изображение функции  $f(t) = e^{-t} \cos 2t$ .

Решение. Имеем  $\cos 2t \doteq \frac{p}{p^2 + 4}$ . По теореме смещения ( $p_0 = -1$ )

$$e^{-t} \cos 2t \doteq \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}.$$

Найти изображения следующих функций:

555. а)  $e^{2t} \sin t$ ; б)  $e^t \cos nt$ .

556.  $e^{-t} \cdot t^3$ . 557.  $e^t \operatorname{sh} t$ . 558.  $te^t \cos t$ .

559.  $e^{3t} \sin^2 t$ . 560.  $e^{-\alpha t} \cos^2 \beta t$ .

VIII. Теорема запаздывания. Если  $f(t) \doteq F(p)$ , то для любого положительного  $\tau$

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p). \quad (5)$$

Теорему запаздывания удобно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

Пример 9. Найти изображение функции

$$f(t - 1) = (t - 1)^2 \eta(t - 1).$$

Решение. Для функции  $f(t) = t^2 \eta(t)$  имеем

$$f(t) \doteq \frac{2}{p^3}.$$

По теореме запаздывания для функции  $(t - 1)^2 \eta(t - 1)$  имеем

$$(t - 1)^2 \eta(t - 1) \doteq e^{-p} \frac{2}{p^3}.$$

Здесь существенно, что ищется изображение функции  $(t - 1)^2 \eta(t - 1)$ , т. е. функции, равной нулю при  $t < 1$ .

Если рассмотреть функцию  $f_1(t) = (t - 1)^2 \eta(t)$ , то для нее имели бы  $f_1(t) = (t^2 - 2t + 1) \eta(t)$  и по свойству линейности

$$(t - 1)^2 \eta(t) \doteq \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Найти изображение функций:

561.  $\sin(t - b) \eta(t - b)$ .

562.  $\cos^2(t - b) \eta(t - b)$ .

563.  $e^{t-2} \eta(t - 2)$ .

Пример 10. Найти изображение  $F(p)$  функции  $f(t)$ , заданной следующим графиком (рис. 34):

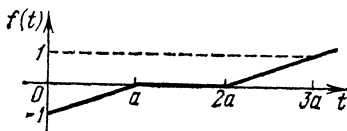


Рис. 34.

Решение. Найдем аналитическое выражение для  $f(t)$ .

а) Для  $t \in (0, a)$  функция  $f(t)$  задается формулой

$$f(t) = \frac{t-a}{a} \eta(t). \quad (6)$$

б) Для  $t \in (a, 2a)$  имеем  $f(t) = 0$ .

в) При  $t \geq 2a$  получаем

$$f(t) = \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a). \quad (7)$$

Предполагая, что функция  $f(t)$  задана формулой (6) для всех  $t \geq 0$ , выясним, какую функцию  $\psi_1(t)$  надо к ней прибавить, чтобы получить функцию  $f(t) = 0$  для всех  $t \geq a$ . Потребовав, чтобы при  $t \geq a$

$$\frac{t-a}{a} + \psi_1(t) = 0,$$

найдем

$$\psi_1(t) = -\frac{t-a}{a} \eta(t-a).$$

Далее находим такую функцию  $\psi_2(t)$ , чтобы в сумме с  $f(t) \equiv 0$  иметь функцию  $\frac{t-2a}{a}$  для всех  $t \geq 2a$ . Это дает

$$0 + \psi_2(t) = \frac{t-2a}{a},$$

откуда

$$\psi_2(t) = \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a).$$

Таким образом, для всех  $t \geq 0$  получим

$$f(t) = \frac{t-a}{a} \eta(t) - \frac{t-a}{a} \eta(t-a) + \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, находим искомое изображение  $F(p)$  данной функции  $f(t)$ :

$$F(p) = \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{ap^2} e^{-ap} - \frac{1}{ap^2} e^{-2ap},$$

Пример 11. Найти изображение  $F(p)$  функции  $f(t)$ , которая задана следующим графиком (рис. 35):

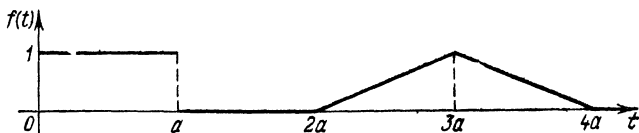


Рис. 35.

Решение. Найдем аналитическое выражение для функции  $f(t)$ .

а)  $f(t) = 1$  для  $t \in (0, a)$ ,

б)  $f(t) = 0$  для  $t \in (a, 2a)$ ,

в)  $f(t) = \frac{t-2a}{a}$  для  $t \in (2a, 3a)$ ,

г)  $f(t) = 1 - \frac{t-3a}{a}$  для  $t \in (3a, 4a)$ ,

д)  $f(t) = 0$  для  $t \geq 4a$ .

Для  $t \in (0, a)$  имеем  $f(t) = 1$ .

Далее найдем функцию  $\psi_1(t)$  такую, чтобы при  $t \geq a$  выполнялось соотношение  $1 + \psi_1(t) = 0$ , откуда  $\psi_1(t) = -1 \cdot \eta(t-a)$ .

Теперь находим функцию  $\psi_2(t)$  такую, чтобы при всех  $t > 2a$  было справедливо равенство  $0 + \psi_2(t) = \frac{t-2a}{a}$ . Отсюда

$$\psi_2(t) = \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a).$$

Аналогично находим функции

$$\psi_3(t) = -2 \frac{t-3a}{a} \eta(t-3a), \quad \psi_4(t) = \frac{t-4a}{a} \eta(t-4a).$$

Таким образом,

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-a) + \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a) - 2 \frac{t-3a}{a} \eta(t-3a) + \frac{t-4a}{a} \eta(t-4a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, получим изображение

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ap} + \frac{1}{ap^2} e^{-2ap} - \frac{2}{ap^2} e^{-3ap} + \frac{1}{ap^2} e^{-4ap}.$$

Пример 12. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 1, \\ t^2 & \text{при } 1 < t < 2, \\ 0 & \text{при } t > 2. \end{cases}$$

Решение. Выразим  $f(t)$  через степени разностей  $t-1$  и  $t-2$ .  
Имеем

$$t^2 = [(t-1) + 1]^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1,$$

$$t^2 = [(t-2) + 2]^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4.$$

Следовательно, данная функция  $f(t)$  запишется в виде

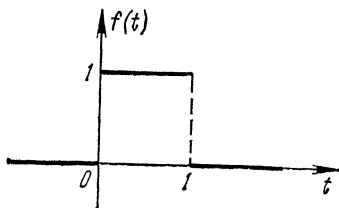
$$f(t) = [(t-1)^2 + 2(t-1) + 1] \eta(t-1) - [(t-2)^2 + 4(t-2) + 4] \eta(t-2).$$

Переходя к изображениям, получим

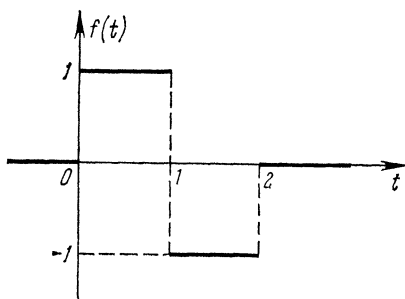
$$f(t) \doteq F(p) = \left( \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} \right) e^{-p} - \left( \frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p} \right) e^{-2p}.$$

Найти изображения следующих функций, заданных графически:

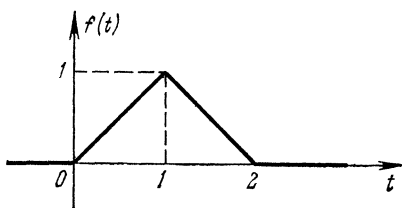
564.



565.



566.

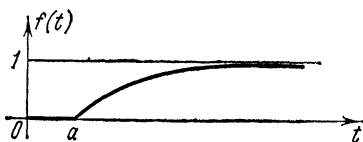


567.



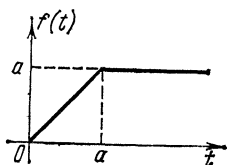
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq a, \\ e^{-b(t-a)} & \text{при } t > a. \end{cases}$$

568.

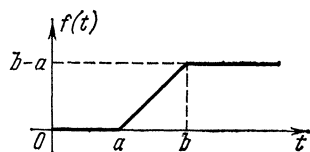


$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq a, \\ 1 - e^{-b(t-a)} & \text{при } t > a. \end{cases}$$

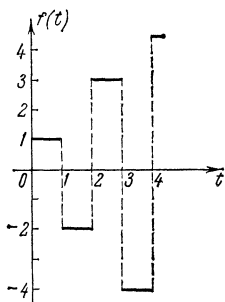
569.



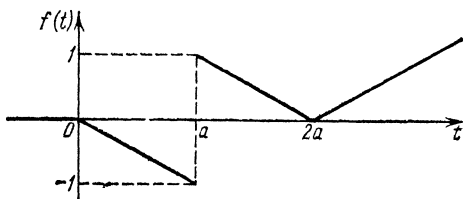
570.



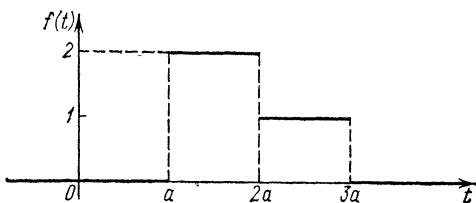
571.



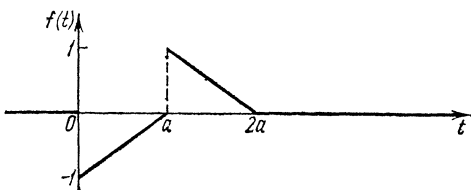
572.



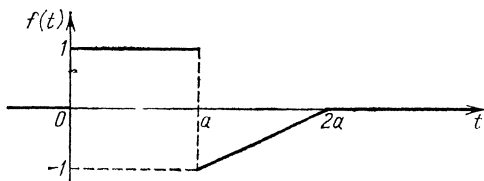
573.



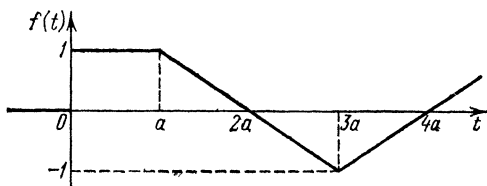
574.



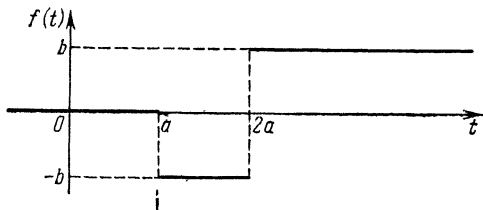
575.



576.



577.



578. Пусть функция  $f(t)$ , периодическая с периодом  $T$ , есть функция-оригинал. Показать, что ее изображение по Лапласу  $F(p)$  дается формулой

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$$

и определено в полуплоскости  $\operatorname{Re} p = s > 0$ .

Пример 13. Найти изображение периодической функции  $f(t)$ , заданной графически (рис. 36).

Решение. Изображение найдем по формуле

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt, \quad (8)$$

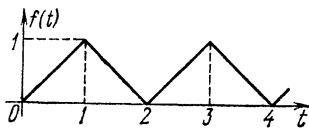


Рис. 36.

где  $f(t)$  — периодическая с периодом  $T$  функция,  $\operatorname{Re} p = s > 0$ . Подставляя в (8) выражение

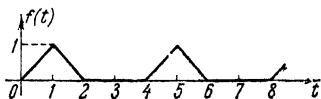
$$f(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - t & \text{при } 1 < t \leq 2, \end{cases}$$

учитывая что  $T = 2$ , получим

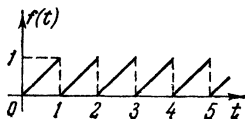
$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \left[ \int_0^1 t e^{-pt} dt + \int_1^2 (2 - t) e^{-pt} dt \right] = \frac{1 - e^{-p}}{p^2 (1 + e^{-p})}.$$

Найти изображение следующих периодических функций:

579.

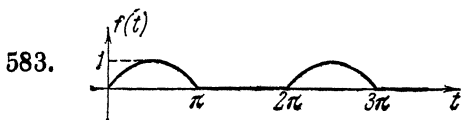


580.





$$581. f(t) = |\sin t|. \quad 582. f(t) = |\cos t|.$$



$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 2k\pi < t < (2k+1)\pi, \\ 0 & \text{при } (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

584. Показать, что если  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$f(t) \eta(t-a) \doteq F(p) - \int_0^a f(t) e^{-pt} dt.$$

В практике операционного исчисления приходится иногда сталкиваться с так называемыми обобщенными функциями\*), играющими важную роль в современной математике.

Одним из представителей обобщенных функций является функция Дирака  $\delta(t)$ , которая определяется так:

$$1) \delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq 0, \\ \infty, & \text{если } t = 0, \end{cases} \quad 2) \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t) f(t) dt = f(0),$$

где  $(\alpha, \beta)$  — любой интервал, содержащий точку  $t=0$ , а  $f(t)$  — функция, непрерывная в точке  $t=0$ .

Аналогично определяется функция  $\delta(t-\tau)$ , сосредоточенная в точке  $t=\tau$ .

В теории обобщенных функций  $\delta(t)$  рассматривается как производная единичной функции  $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$

$$\eta'(t) = \delta(t). \quad (9)$$

Аналогично, при любом  $\tau$

$$\eta'(t-\tau) = \delta(t-\tau).$$

Заметим, что производная функции  $\eta(t)$  в обычном смысле равна нулю для всех  $t \neq 0$ , а при  $t=0$  не существует.

Справедливы формулы

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &\doteq 1; \\ \delta^{(m)}(t) &\doteq p^m, \quad m - \text{целое } \geq 0; \\ \delta(t-\tau) &\doteq e^{-p\tau} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

\*) Строгое определение обобщенных функций см., например, в книге: И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959.

Рассмотрим функцию  $f(t)$ , имеющую разрывы первого рода в точках  $t_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) со скачками

$$h_k = f(t_k + 0) - f(t_k - 0) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Пусть  $f(t)$  непрерывно дифференцируема в интервалах  $(t_k, t_{k+1})$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) и при  $t < t_1$  и  $t > t_n$ . Тогда

$$f'(t) = f'_1(t) + \sum_{k=1}^n h_k \delta(t - t_k), \quad (11)$$

где  $f_1(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n h_k \eta(t - t_k)$  — «сомкнутая» функция. Таким образом, производная разрывной функции  $f(t)$  составляется из ее обычной производной  $f'_1(t)$  (в интервалах гладкости  $f(t)$ ) и суммы  $\delta$ -функций в точках разрыва с соответствующими скачками в качестве коэффициентов. Это правило важно для правильного применения теорем операционного исчисления к разрывным функциям.

Рассмотрим, например, функцию  $f(t)$ , определяемую так:

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Применяя формулу (11), находим

$$f'(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2),$$

откуда согласно соотношениям (10)

$$f'(t) \doteq 1 - 2e^{-p} + e^{-2p}.$$

Далее

$$f(t) \doteq \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-2p},$$

что дает снова

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Нестрогие рассуждения без учета формулы (11) привели бы к следующему. Производная  $f'(t)$  в обычном смысле равна нулю всюду, кроме точек  $t=0, t=1, t=2$ , где она не существует. Но тогда и интеграл Лапласа от  $f'(t)$  тоже должен быть равен нулю, откуда и изображение  $f(t)$  получается равным нулю, что явно неверно.

**585.** Решить задачу № 580, найдя сначала изображение производной функции  $f(t)$ , а затем изображение самой функции  $f(t)$ .

**586.** Пусть  $a$  и  $b$  — два положительных числа, и пусть  $f(t) \doteq F(p)$ .

Показать, что функция

$$g(t) = \begin{cases} f(at - b), & t > \frac{b}{a}, \\ 0, & t < \frac{b}{a}, \end{cases}$$

имеет изображение  $\frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a} p} F\left(\frac{p}{a}\right)$  (совместная теорема подобия и запаздывания).

587. Найти изображения функций:

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right), & t > \frac{\pi}{8}, \\ 0, & t < \frac{\pi}{8}; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(t) = \begin{cases} \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right), & t > \frac{\pi}{18}, \\ 0, & t < \frac{\pi}{18}; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(t) = \begin{cases} \text{sh}(3t - 6), & t > 2, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$$

588. Найти изображение функции распределения масс  $m_k$  в точках  $t = k$

$$f(t) = \sum_{k=0}^n m_k \delta(t - k).$$

IX. Теорема умножения (теорема о свертке). Произведение двух изображений  $F(p)$  и  $\Phi(p)$  также является изображением, причем

$$F(p) \Phi(p) \doteq \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau. \quad (12)$$

Интеграл в правой части (12) называется *сверткой* функций  $f(t)$  и  $\varphi(t)$  и обозначается символом  $f(t) * \varphi(t)$ .

Пример 14. Найти изображение функции

$$\psi(t) = \int_0^t (t - \tau) e^{\tau} d\tau.$$

Решение. Функция  $\psi(t)$  есть свертка функций  $f(t) = t$  и  $\varphi(t) = e^t$ . По теореме умножения

$$\psi(t) \doteq \Psi(p) = F(p) \Phi(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Пример 15. Пусть  $F_1(p) = \frac{1}{p^x}$ ,  $F_2(p) = \frac{1}{p^y}$  ( $x > 0$ ,  $y > 0$  — действительные). Тогда

$$f_1(t) = \frac{t^{x-1}}{\Gamma(x)}, \quad f_2(t) = \frac{t^{y-1}}{\Gamma(y)}.$$

По теореме умножения

$$F_1(\rho) F_2(\rho) = \frac{1}{\rho^{x+y}} \doteq \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^t (t-\tau)^{y-1} \tau^{x-1} d\tau. \quad (13)$$

С другой стороны,

$$F_1(\rho) \cdot F_2(\rho) = \frac{1}{\rho^{x+y}} \doteq \frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) имеем

$$\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)} = \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^t (t-\tau)^{y-1} \tau^{x-1} d\tau.$$

Положив  $\tau = \lambda t$ , из последнего равенства получим

$$\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)} = \frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^1 \lambda^{x-1} (1-\lambda)^{y-1} d\lambda.$$

Интеграл в правой части есть В-функция Эйлера  $V(x, y)$ . Мы приходим к замечательной формуле, связывающей В- и  $\Gamma$ -функции Эйлера

$$V(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Повторная свертка. Пусть имеем три функции  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ . Тогда

$$F_1(\rho) F_2(\rho) \doteq \int_0^t f_2(\tau_1) f_1(t-\tau_1) d\tau_1.$$

Далее

$$\begin{aligned} (F_1(\rho) \cdot F_2(\rho)) \cdot F_3(\rho) &\doteq \int_0^t \left\{ \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1) f_1(t-\tau_1-\tau_2) d\tau_1 \right\} f_3(\tau_2) d\tau_2 = \\ &= \int_0^t f_3(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1) f_1(t-\tau_1-\tau_2) d\tau_1. \end{aligned}$$

Пусть

$$F_1(\rho) = \frac{1}{\rho} \doteq \eta(t).$$

Тогда

$$\frac{F_2(\rho) F_3(\rho)}{\rho} \doteq \int_0^t f_3(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1) \eta(t-\tau_1-\tau_2) d\tau_1.$$

Из определения функции  $\eta(t)$  следует, что фактически интегрирование ведется по области  $t > \tau_1 + \tau_2$ , где  $\eta(t - \tau_1 - \tau_2) = 1$ . Таким образом,

$$\frac{F_2(\rho) F_3(\rho)}{\rho} \doteq \int_{\tau_1 + \tau_2 < t} \int f_2(\tau_1) f_3(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Воспользуемся этим результатом для нахождения объема  $n$ -мерного шара. Введем прямоугольную декартову систему координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в  $n$ -мерном пространстве.

Объем  $V_n(R)$  гипершара радиуса  $R$  определяется равенством

$$V_n(R) = \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

В силу симметрии шара относительно его центра

$$V_n(R) = 2^n \int_0^R dx_1 \int_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} dx_2 \dots \int_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2}} dx_n.$$

Сделаем замену  $x_k = \sqrt{\tau_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда

$$V_n(R) = \iiint_{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n < R^2} \frac{d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n}{\sqrt{\tau_1} \sqrt{\tau_2} \dots \sqrt{\tau_n}}.$$

Это есть повторная свертка  $n$  одинаковых функций

$$f_k(t) = \frac{\eta(t)}{\sqrt{t}} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \text{где } t = R^2.$$

Изображение каждой из таких функций

$$f_k(t) \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \quad (\text{см. задачу 515}).$$

Поэтому

$$V_n(\sqrt{t}) \cdot \frac{(\sqrt{\pi})^n}{p^{1+n/2}} = \frac{\pi^{n/2}}{p^{1+n/2}},$$

откуда

$$V_n(\sqrt{t}) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} t^{n/2} = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} = V_n(R).$$

Итак,

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}.$$

В частности, при  $n = 2$  находим

$$V_2(R) = \frac{\pi R^2}{\Gamma(2)} = \pi R^2.$$

Найти изображение следующих функций:

$$589. \int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau. \quad 590. \int_0^t \cos(t-\tau) e^{2\tau} d\tau$$

$$591. \int_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch} \tau d\tau. \quad 592. \int_0^t (t-\tau)^n f(\tau) d\tau.$$

$$593. \int_0^t e^{2(\tau-t)} \tau^2 d\tau.$$

Первая теорема разложения. Если  $F(p)$  — аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки и равна в ней нулю и если лорановское разложение  $F(p)$  в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид  $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$ , то оригиналом  $F(p)$  служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1},$$

причем этот ряд сходится при всех  $t$ .

Пример 16. Рассмотрим функцию  $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$ . Она аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, и ее лорановское разложение в окрестности этой точки имеет вид

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p}{p^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{p^{2n}} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos t,$$

что совпадает с известным результатом.

Пример 17. Найти изображение функции  $f(t) = J_0(t)$ , где  $J_0(t)$  — функция Бесселя нулевого порядка.

Решение. Известно, что ([20])

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Рассмотрим функцию  $F(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ . Эта функция однозначна в области  $|p| > 1$ , аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и обращается в этой точке в нуль. Найдем ее лорановское разложение в окрестности бесконечно удаленной точки по формуле разложения бинома:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2 2^{2k} p^{2k+1}}.$$

Согласно первой теореме разложения оригиналом для  $F(p)$  будет функция

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = J_0(t).$$

Таким образом,

$$J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

**Пример 18.** Вывести рекуррентное соотношение

$$J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t).$$

**Решение.** Известно (см. задачу 596), что

$$J_n(t) \doteq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Используя теорему об интегрировании изображения, получаем

$$\frac{J_n(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}} dp.$$

Положим  $\sqrt{p^2+1}-p=v$ . Тогда

$$\int \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}} dp = - \int v^{n-1} dv = -\frac{v^n}{n} + c,$$

так что

$$\frac{J_n(t)}{t} \doteq -\frac{1}{n} [(\sqrt{p^2+1}-p)^n] \Big|_{p=\nu}^{\infty} = \frac{1}{n} (\sqrt{p^2+1}-p)^n. \quad (15)$$

С другой стороны, из выражений

$$J_{n-1}(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} (\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1},$$

$$J_{n+1}(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} (\sqrt{p^2+1}-p)^{n+1}$$

находим

$$J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) \doteq 2(\sqrt{p^2+1}-p)^n. \quad (16)$$

Из соотношений (15) и (16) устанавливаем

$$J_{n-1}(t) - \frac{2n}{t} J_n(t) + J_{n+1}(t) = 0.$$

**594.** Показать, что

$$J'_n(t) = \frac{J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)}{2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

**595.** Найти изображение функции  $f(t) = J_1(t)$ .

596. Показать, что  $J_n(t) \doteq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$ .

597. Показать, что

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

598. Функция Бесселя первого рода чисто мнимого аргумента  $I_n(t)$  выражается через функцию Бесселя  $J_n(t)$  соотношением  $I_n(t) = (i)^{-n} J_n(it)$ .

Показать, что

$$I_n(t) \doteq \frac{(p - \sqrt{p^2 - 1})^n}{\sqrt{p^2 - 1}}.$$

599. Полиномы Лагерра определяются формулой

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Показать, что

$$L_n(t) \doteq \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

600. Найти изображение функции  $f(t) = \ln t$ .

601. Показать, что  $\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p\sqrt{p+1}}$ , где

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du.$$

Пусть требуется найти сумму функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)$ ,

где  $\varphi_n(t)$  — функции-оригиналы.

Заменяя функции  $\varphi_n(t)$  их изображениями, приходим к ряду, составленному из изображений, суммировать который иногда бывает значительно проще, чем исходный ряд. Переходя от найденной суммы к функции-оригиналу, найдем сумму данного ряда.

Пример 19. Для полиномов Лагерра  $L_n(t)$  имеем

$$L_n(t) \doteq \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n.$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(t) \doteq \frac{1}{p} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 - \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + 1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{2p-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p - \frac{1}{2}} \doteq \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.$$



Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}}.$$

602. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_{2n}(2t) = \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t).$$

603. Показать, что  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} = e J_0(2\sqrt{t})$ .

604. Показать, что  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(t) = \frac{1}{2} \sin t$ .

605. Показать, что  $J_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t) = 1$ , где  $J_k(t)$  — функция Бесселя порядка  $k$ .

606. Показать, что  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{2^{n+1}} = e^{-t}$ ,  $0 < t < +\infty$ .

Пример 20. Вычислить интеграл

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tu}{a^2 + u^2} du, \quad t > 0.$$

Решение. Для  $\cos tu$ , рассматриваемого как функция аргумента  $t$ , по теореме подобия имеем

$$\cos tu \doteq \frac{p}{p^2 + u^2}.$$

Поэтому

$$f(t) \doteq \int_0^{+\infty} \frac{p du}{(p^2 + u^2)(a^2 + u^2)}.$$

Подынтегральная функция, как функция аргумента  $u$ , допускает представление

$$\frac{p}{(p^2 + u^2)(a^2 + u^2)} = -\frac{p}{p^2 - a^2} \cdot \frac{1}{p^2 + u^2} + \frac{p}{p^2 - a^2} \cdot \frac{1}{a^2 + u^2}.$$

Следовательно,

$$f(t) \doteq \left( -\frac{1}{p^2 - a^2} \operatorname{arctg} \frac{u}{p} + \frac{p}{p^2 - a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} \right) \Big|_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{2a} \frac{1}{p + a}.$$

Переходя к функциям-оригиналам, получим окончательно

$$f(t) = \frac{\pi}{2a} e^{-at}.$$

Вычислить интегралы:

607. а)  $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{u \sin tu}{1+u^2} du, t > 0;$

б)  $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tu \cdot \cos u}{u} du, t > 0.$

608. Найти значения функции  $f(t)$  и ее первых двух производных при  $t \rightarrow +0$ , если  $f(t) \doteq \frac{p+1}{p(p^2+p+1)}$  и  $f'(t)$ ,  $f''(t)$ ,  $f'''(t)$  — оригиналы.

Отыскание оригинала по изображению. Для нахождения оригинала  $f(t)$  по известному изображению  $F(p)$  применяются следующие приемы:

1. Если  $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$  есть правильная рациональная дробь, то разлагают эту дробь на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства I—IX преобразования Лапласа.

Пример 21. Найти оригинал для функции  $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$ .

Решение. Разлагаем  $F(p)$  в сумму простых дробей:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Находя коэффициенты  $A, B, C, D$ , получаем

$$F(p) = -\frac{1}{4} \frac{1}{p} + \frac{1}{5} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{20} \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5} \frac{1}{p^2+4}. \quad (17)$$

Оригиналы для каждой из простых дробей в правой части (17) находятся просто. Используя свойство линейности, находим

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{20} \cos 2t - \frac{1}{10} \sin 2t.$$

Пример 22.  $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$ . Найти оригинал  $f(t)$ .

Решение. В данном случае  $F(p)$  уже есть простая дробь. Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой умножения и тем, что

$$\frac{1}{p^2+1} \doteq \sin t.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} = \\
 &= \int_0^t \sin(t-\tau) \sin \tau \, d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t - \cos(2\tau-t)] \, d\tau = \\
 &= \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{4} \sin(2\tau-t) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t.
 \end{aligned}$$

Пример 23.  $F(p) = \frac{e^{-p}}{p+1}$ . Найти оригинал  $f(t)$ .

Решение. Наличие множителя  $e^{-p}$  указывает на необходимость применения теоремы запаздывания. Здесь  $\tau=1$ ,  $\frac{1}{p+1} = e^{-t}$ , поэтому

$$\frac{e^{-p}}{p+1} = e^{-(t-1)} \eta(t-1).$$

II. С помощью второй теоремы разложения, которая утверждает, что при определенных условиях, наложенных на  $F(p)$ , оригиналом для  $F(p)$  служит функция

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname{res} [F(p) e^{pt}],$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам  $p_k$  функции  $F(p)$ .

В частности, если  $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$  — правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{F(p) e^{pt} (p-p_k)^{n_k}\}, \quad (18)$$

где  $p_k$  — полюсы  $F(p)$  кратности  $n_k$  и сумма в (18) берется по всем полюсам  $F(p)$ .

Если все полюсы  $F(p)$  простые, то формула (18) упрощается и принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{O(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Пример 24.  $F(p) = \frac{p}{(p^2-1)^2}$ . Найти оригинал  $f(t)$ .

Решение. Функция  $F(p)$  имеет полюсы  $p_1=1$ ,  $p_2=-1$ , каждый второго порядка. По формуле (18)

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \left[ \frac{pe^{pt}}{(p-1)^2} \right]'_p + \lim_{p \rightarrow -1} \left[ \frac{pe^{pt}}{(p-1)^2} \right]'_p = \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t,$$

Для данных изображений найти оригиналы и построить их графики:

$$609. F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3}. \quad 610. F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

$$611. F(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}. \quad 612. F(p) = \frac{e^{-3p}}{p+3}.$$

Найти оригиналы по заданному изображению:

$$613. F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}. \quad 614. F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}.$$

$$615. F(p) = \frac{p}{(p+1)^2}. \quad 616. F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

$$617. F(p) = \frac{1}{p + 2p^2 + p^3}. \quad 618. F(p) = \frac{1}{7 - p + p^2}.$$

$$619. F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}. \quad 620. F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

$$621. F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

$$622. F(p) = \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}.$$

$$623. F(p) = \frac{1}{p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}.$$

$$624. F(p) = \frac{p^2 + 2p - 1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}.$$

$$625. F(p) = \frac{p}{p^3 + 1}. \quad 626. F(p) = \frac{2p+3}{p^3 + 4p^2 + 5p}.$$

$$627. F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}.$$

$$628. F(p) = \frac{p^2 + 2p - 1}{p^3 - 2p^2 + 2p - 1}.$$

$$629. F(p) = \frac{3p^2}{(p^3 - 1)^2}.$$

$$630. F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2 - 2p + 5} + \frac{pe^{-2p}}{p^2 + 9}.$$

$$631. F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}. \quad 632. F(p) = \frac{e^{-p}}{p(p-1)}.$$

$$633. F(p) = \frac{1}{p^2+1} (e^{-2p} + 2e^{-3p} + 3e^{-4p}).$$

$$634. F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-1} + \frac{pe^{-2p}}{p^2-4}.$$

$$635. F(p) = \frac{e^{-p/2}}{p(p+1)(p^2+4)}.$$

$$636. F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{2e^{-2p}}{p^3} + \frac{6e^{-3p}}{p^4}. \quad 637. F(p) = \frac{e^{-p/3}}{p(p^2+1)}.$$

Теорема Эфроса. Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ , и пусть  $\Phi(p)$  и  $q(p)$  — аналитические функции такие, что

$$\Phi(p) e^{-\tau q(p)} \doteq \varphi(t, \tau).$$

Тогда

$$F[q(p)] \Phi(p) \doteq \int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau.$$

В частности, если  $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ ,  $q(p) = \sqrt{p}$ , то

$$\varphi(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau^2/4t}.$$

Поэтому, если известно, что  $F(p) \doteq f(t)$ , то по теореме Эфроса находим оригинал для  $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$ :

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\tau^2/4t} d\tau. \quad (19)$$

Используя теорему Эфроса, найти оригиналы следующих функций ( $a$  — вещественное число):

$$638. F(p) = \frac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{p}. \quad 639. F(p) = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}.$$

$$640. F(p) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p^2}. \quad 641. F(p) = \frac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{\sqrt{p} \left( \frac{\sqrt{p}}{a} + h \right)}.$$

$$642. F(p) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p}+a)}.$$

Используя теорему Эфроса, вычислить следующие интегралы:

$$643. I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \operatorname{ch} \tau e^{-\tau^2/4t} d\tau.$$

$$644. I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \cos \tau e^{-\tau^2/4t} d\tau.$$

$$645. I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \tau e^{-\tau^2/4t} d\tau.$$

$$646. I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \tau \sin \tau e^{-\tau^2/4t} d\tau.$$

### § 15. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть имеем дифференциальное уравнение (для простоты второго порядка)

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t), \quad (1)$$

где  $a_0, a_1, a_2 = \text{const}$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $f(t)$  — функция-оригинал.

Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \quad (2)$$

Пусть  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ . Применяя к обеим частям (1) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, вместо дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (2) получаем операторное уравнение

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X(p) - (a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0) = F(p), \quad (3)$$

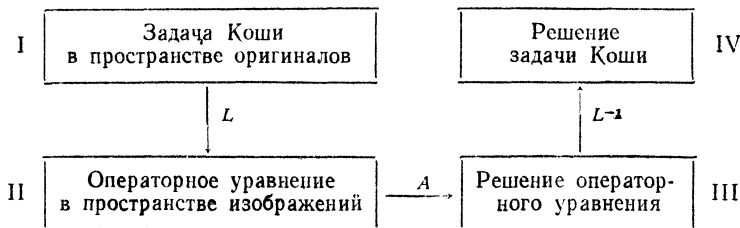
Из (3) находим

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Это так называемое операторное решение. Находя по  $X(p)$  оригинал  $x(t)$ , мы тем самым найдем функцию  $x(t)$  — решение задачи Коши (1) — (2).

Общий случай решения задачи Коши для дифференциального уравнения  $n$ -го порядка принципиально ничем не отличается от случая  $n=2$ .

*Схема решения задачи Коши  
с помощью преобразования Лапласа*



Здесь  $L$  означает применение к I преобразования Лапласа,  $A$  — решение операторного уравнения II,  $L^{-1}$  — применение к III обратного преобразования Лапласа.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$x'' + x = 2 \cos t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Решение.

$$x(t) \doteq X(p), \quad x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \doteq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1, \quad \cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1},$$

так что операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1};$$

отсюда

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Находим оригинал для  $X(p)$ . Оригиналы для функции  $\frac{1}{p^2 + 1}$ :

$$\frac{1}{p^2 + 1} \doteq \sin t.$$

Для нахождения оригинала для функции  $\frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$  воспользуемся, например, теоремой о дифференцировании изображения (см. § 14):

$$\frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = - \left( \frac{1}{p^2 + 1} \right)'_p \doteq t \sin t.$$

Значит,  $X(p) \doteq t \sin t - \sin t = (t - 1) \sin t$ .

Итак,  $x(t) = (t - 1) \sin t$ .

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

$$647. \quad x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$$

$$648. \quad x' - x = 1, \quad x(0) = -1.$$

$$649. \quad x' + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0.$$

$$650. \quad x'' = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$651. \quad x'' + x' = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$652. \quad x'' + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

$$653. \quad x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

$$654. \quad x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$655. \quad x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$656. \quad x''' + x' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$657. \quad x'' + 2x' = t \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

658.  $x'' + 2x' + x = \sin t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ .
659.  $x''' - x'' = \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ .
660.  $x''' + x' = t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ ;  
 $x''(0) = 0$ .
661.  $x' - 2x' + x = e^t$ ;  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .
662.  $x''' + 2x'' + 5x' = 0$ ,  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = 2$ ,  
 $x''(0) = 0$ .
663.  $x'' - 2x' + 2x = 1$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
664.  $x'' + x' = \cos t$ ,  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = 0$ .
665.  $x'' + 2x' + x = t^2$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ .
666.  $x''' + x'' = \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = 1$ ,  $x''(0) = 0$ .
667.  $x'' + x = \cos t$ ,  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = 1$ .
668.  $x''' + x'' = t$ ,  $x(0) = -3$ ,  $x'(0) = 1$ ,  
 $x''(0) = 0$ .
669.  $x'' + 2x' + 5x = 3$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ .
670.  $x^{IV} - x'' = \cos t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ ,  
 $x''(0) = x'''(0) = 0$ .
671.  $x'' + 2x' + 2x = 1$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
672.  $x'' + x = 1$ ,  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = 0$ .
673.  $x'' + 4x = t$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ .
674.  $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
675.  $x''' + x = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ ,  
 $x''(0) = 2$ .
676.  $x''' + x'' = \cos t$ ,  $x(0) = -2$ ,  $x'(0) =$   
 $= x''(0) = 0$ .
677.  $x''' + x' = e^t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 2$ ,  
 $x''(0) = 0$ .
678.  $x^{IV} - x'' = 1$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) =$   
 $= x'''(0) = 0$ .
679.  $x'' + x' = \cos t$ ,  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = 0$ .
680.  $x'' - x' = te^t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
681.  $x''' + x' = \cos t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -2$ ,  
 $x''(0) = 0$ .
682.  $x'' + 2x' + x = t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
683.  $x'' - x' + x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .



684.  $x'' - x = \sin t$ ,  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = 0$ .
685.  $x''' + x = e^t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 2$ ,  
 $x''(0) = 0$ .
686.  $x'' + x = 2 \sin t$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = -1$ .
687.  $x'' - 2x' + x = t - \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
688.  $x'' + 2x' + x = 2 \cos^2 t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
689.  $x'' + 4x = 2 \cos t \cdot \cos 3t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
690.  $x'' + x = te^t + 4 \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
691.  $x'' - x' = te^t$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ .
692.  $x'' + x' = 4 \sin^2 t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ .
693.  $x''' - 2x'' + x' = 4$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ ,  
 $x''(0) = -2$ .
694.  $x'' - 3x' + 2x = e^t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
695.  $x'' - x' = t^2$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .
696.  $x''' + x = \frac{1}{2} t^2 e^t$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ .
697.  $x'' + x = t \cos 2t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
698.  $x'' + n^2 x = a \sin(nt + \alpha)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
699.  $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2$ ,  $x(0) = x'(0) =$   
 $= x''(0) = 0$ .
700.  $x^{IV} + 2x'' + x = t \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) =$   
 $= x'''(0) = 0$ .
701.  $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .
702.  $x'' + 4x = \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
703.  $x''' + x' = e^{2t}$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ .
704.  $x^{IV} + x''' = \cos t$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ ,  
 $x'''(0) = \gamma$ .
705.  $x'' - 4x = \sin \frac{3}{2} t \sin \frac{1}{2} t$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ .
706.  $x^{IV} - 5x'' + 10x' - 6x = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ,  
 $x''(0) = 6$ ,  $x'''(0) = -14$ .
707.  $x'' + x' + x = te^t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
708.  $x'' + x = t \cos t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
709.  $x''' + 3x'' - 4x = 0$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ ,  $x''(0) = 2$ .
710.  $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ .

$$711. x''' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$712. x'' + \omega^2 x = a[\eta(t) - \eta(t-b)], \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Требование, чтобы начальные условия были заданы в точке  $t=0$ , несущественно, так как линейной заменой независимой переменной  $t$  задача Коши при  $t=t_0 \neq 0$  сводится к задаче с начальными условиями в точке  $t=0$ . Покажем это на примере дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \quad (4)$$

удовлетворяющее начальным условиям  $x(t_0) = x_0$ ,  $x'(t_0) = x_1$ , где  $t_0 \neq 0$ .

Положим

$$t = \tau + t_0; \quad x(t) = x(\tau + t_0) = \tilde{x}(\tau); \quad f(t) = f(\tau + t_0) = \tilde{f}(\tau).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x'(t) &= x'(\tau + t_0) = \tilde{x}'(\tau), \\ x''(t) &= x''(\tau + t_0) = \tilde{x}''(\tau), \end{aligned}$$

и уравнение (4) и начальные условия примут вид

$$\begin{aligned} a_0 \tilde{x}''(\tau) + a_1 \tilde{x}'(\tau) + a_2 \tilde{x}(\tau) &= \tilde{f}(\tau), \\ \tilde{x}(0) &= x_0, \quad \tilde{x}'(0) = x_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Мы получили задачу Коши для уравнения (5) с начальными условиями, заданными в точке  $\tau=0$ ,

**Пример 2.** Найти решение уравнения  $x''(t) + x'(t) = t$ , удовлетворяющее начальным условиям  $x(1) = 1$ ,  $x'(1) = 0$ .

**Решение.** Положим  $t = \tau + 1$  и  $x(t) = x(\tau + 1) = \tilde{x}(\tau)$ . Тогда данное уравнение и начальные условия примут вид

$$\tilde{x}''(\tau) + \tilde{x}'(\tau) = \tau + 1, \quad \tilde{x}(0) = 1, \quad \tilde{x}'(0) = 0, \quad (6)$$

так как значению  $t=1$  отвечает значение  $\tau=0$ .

Составим операторное уравнение для дифференциального уравнения (6). Пусть  $\tilde{x}(t) \doteq X(p)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(\tau) &\doteq pX(p) - 1, \\ \tilde{x}''(\tau) &\doteq p^2X(p) - p, \end{aligned}$$

и операторным уравнением будет

$$p^2X(p) - p + pX(p) - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Решая его относительно  $X(p)$ , найдем

$$X(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

Переходя к оригиналам, получим

$$\tilde{x}(\tau) = 1 + \frac{\tau^2}{2}.$$

Заменяв здесь  $\tau$  на  $t-1$ , будем иметь искомое решение задачи Коши

$$x(t) = 1 + \frac{(t-1)^2}{2}.$$

Решить следующие дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями:

$$713. x'' + x = 0; \quad x(\pi) = 1, \quad x'(\pi) = 0.$$

$$714. x''(t) + x'(t) = 2t; \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = -1.$$

$$715. x''(t) - x'(t) = -2t; \quad x(2) = 8, \quad x'(2) = 6.$$

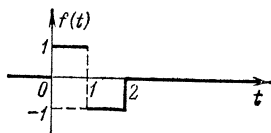
$$716. x''(t) + x(t) = -2 \sin t; \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$717. x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2e^{1-t}; \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = -1.$$

Пример 3. Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} x'' + x &= f(t), \\ x(0) &= x'(0) = 0, \end{aligned}$$

если функция  $f(t)$  задана графически



Решение. Очевидно

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2),$$

поэтому, применяя формулу

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p),$$

получим

$$f(t) \doteq \frac{1}{p} - 2 \cdot \frac{e^{-p}}{p} + 1 \cdot e^{-2p} \frac{1}{p} = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p}.$$

Полагая  $x(t) \doteq X(p)$  и учитывая начальные условия, получим

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p).$$

Операторное уравнение

$$(p^2 + 1) X(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} - \frac{2e^{-p}}{p(p^2 + 1)} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2 + 1)}.$$

Так как

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} \doteq (1 - \cos t) \eta(t),$$

ибо

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1},$$

то

$$\frac{1}{p(p^2+1)} e^{-p \cdot \frac{t}{2}} [1 - \cos(t-1)] \eta(t-1),$$

а

$$\frac{1}{p(p^2+1)} e^{-2p \cdot \frac{t}{2}} [1 - \cos(t-2)] \eta(t-2)$$

(здесь применяем теорему запаздывания: если  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p).$$

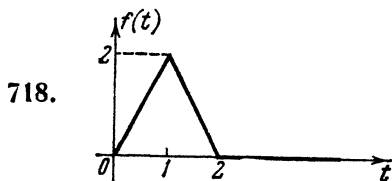
Значит,

$$x(t) = (1 - \cos t) \eta(t) - 2[1 - \cos(t-1)] \eta(t-1) + [1 - \cos(t-2)] \eta(t-2)$$

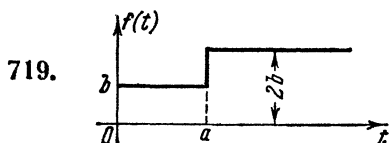
или

$$x(t) = 2 \left[ \sin^2 \frac{t}{2} \eta(t) - 2 \sin^2 \frac{t-1}{2} \eta(t-1) + \sin^2 \frac{t-2}{2} \eta(t-2) \right].$$

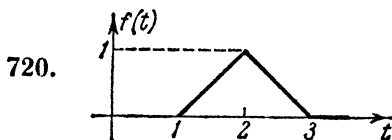
Решить следующие задачи Коши:



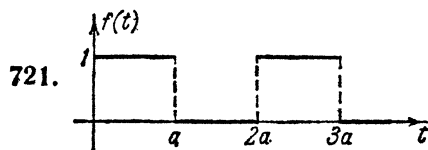
$$\begin{aligned} x'' + 4x &= f(t), \\ x(0) = x'(0) &= 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x'' + x &= f(t), \\ x(0) = 1, \quad x'(0) &= 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x'' + 9x &= f(t), \\ x(0) = 0, \quad x'(0) &= 1. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x'' - 2x' + x &= f(t), \\ x(0) = x'(0) &= 0. \end{aligned}$$

722. Частица массы  $m$  движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы  $m\lambda x$ , пропорциональной смещению, и силы сопротивления  $2m\mu v$ , пропорциональной скорости. В момент времени  $t = 0$  частица находится на расстоянии  $x_0$ , от положения равновесия и обладает скоростью  $v_0$ . Показать, что если имеет место равенство  $n^2 = \lambda^2 - \mu^2$ , то смещение частицы определяется выражением

$$\frac{1}{n} e^{-\mu t} [n x_0 \cos nt + (v_0 + \mu x_0) \sin nt].$$

723. Частица массы  $m$  может совершать малые колебания относительно положения равновесия и находится под воздействием восстанавливающей силы  $mn^2x$ , пропорциональной смещению. Она выводится из состояния покоя постоянной силой  $F$ , действующей в течение времени  $T$ . Показать, что амплитуда колебания равна

$$\frac{2F}{mn^2} \sin \frac{nT}{2} \quad \text{при } t > T.$$

724. Математический маятник длины  $l$  выводится из положения равновесия малыми отклонениями точки подвеса в горизонтальном направлении. Показать, что если точка подвеса переместилась на расстояние  $a$ , то отклонение маятника равно  $a(1 - \cos nt)$ ,  $n^2 = g/l$ .

725. Частица брошена вертикально вверх со скоростью  $v_0$ . На нее действуют сила тяжести и сила сопротивления  $2kvt$ . Показать, что в момент времени  $t$  она будет находиться на расстоянии  $-\frac{gt}{2k} + \frac{g + 2kv_0}{4k^2}(1 - e^{-2kt})$  от точки бросания.

726. Материальная точка массы 2 грамма движется прямолинейно под действием силы  $F$ , возрастающей на  $a$  дин в секунду. В начальный момент точка находилась в начале координат и имела скорость  $v_0 = 10$  см/с. Зная, что начальная величина силы  $F_0 = 4$  дин и что на расстоянии 450 см от начала координат скорость  $v = 105$  см/с, определить значение величины  $a$ .

727. Материальная точка массы  $m$  движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат  $O$  с силой  $F$ , прямо пропорциональной расстоянию ( $F = 4mx$ ). На точку действует сопротивление среды  $R = 3mv$ . В начальный

момент расстояние от начала равно 1, а скорость равна нулю. Найти закон движения точки.

**728.** Тяжелая точка массы  $m$  падает в среде, сопротивление которой прямо пропорционально первой степени скорости. Определить наибольшую скорость точки, если при  $v=1$  м/с сила сопротивления равна одной трети веса точки и начальная скорость  $v_0=0$ .

**729.** Материальная точка массы  $m$  движется в среде, сопротивление которой прямо пропорционально первой степени скорости (коэффициент пропорциональности  $k$ ). Какое расстояние пройдет точка до остановки, если ей сообщена начальная скорость  $v_0$  и кроме силы сопротивления никаких других сил нет?

**730.** Тяжелая однородная цепочка массы  $m$  и длины  $2l$  лежит на гладком горизонтальном столе так, что половина ее свешивается со стола. Определить закон движения цепочки во время ее соскальзывания со стола и найти время соскальзывания.

**731.** Точка массы  $m$  находится на прямой, проходящей через два центра  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми  $2d$ . Центры притягивают точку с силами, прямо пропорциональными расстоянию до центра; коэффициент пропорциональности  $mk^2$  одинаков для обоих центров. В начальный момент точка находится на расстоянии  $a$  от середины  $O$  отрезка  $AB$ , не имея начальной скорости. Определить закон движения точки.

**732.** Неподвижный центр  $O$  притягивает точку массы  $m$  с силой  $F=\mu mr$ , где  $r$  — расстояние точки от этого центра и  $\mu$  — постоянный коэффициент. В начальный момент  $r=a$  и скорость  $v=0$ . Через сколько времени точка достигнет центра  $O$ ?

**733.** Лодке сообщена начальная скорость  $v_0=6$  м/с. Через 69 с после начала движения эта скорость уменьшается вдвое. Найти закон движения лодки, если сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости лодки.

**734.** Материальная точка массы  $m=2$  совершает прямолинейные колебания по оси  $Ox$  под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию точки от начала координат (коэффициент пропорциональности равен 8), и возмущающей силы  $F=4 \cos t$ . Найти закон движения точки, если в начальный момент  $x=0$  и  $v=0$ .

**735.** Определить движение материальной точки массы  $m$ , притягиваемой к неподвижному центру  $O$  силой, прямо пропорциональной расстоянию и равной  $k^2m$  на расстоянии, равном единице длины.

В начальный момент точка находилась на расстоянии  $a$  от центра  $O$  и имела скорость  $v_0$ , перпендикулярную к прямой, соединяющей начальное положение с центром  $O$ .

**736.** Решить задачу 735, предполагая, что точка  $M$  отталкивается от центра с силой, прямо пропорциональной расстоянию, при том же коэффициенте пропорциональности.

**737.** К цепи, состоящей из емкости  $C$  и индуктивности  $L$ , соединенных последовательно, в момент времени  $t=0$  приложена э. д. с.  $E \cos(\omega t + \alpha)$ . Начальные ток и заряд равны нулю. Показать, что ток в момент  $t$  равен

$$E \{ \omega \sin(\omega t + \alpha) - n \cos \alpha \sin nt - \omega \sin \alpha \cos nt \} \frac{1}{L(\omega^2 - n^2)},$$

где  $n^2 = \frac{1}{LC}$ ; предполагается, что  $n^2 \neq \omega^2$ .

**738.** К цепи предыдущего примера, с нулевыми начальными током и зарядом в момент времени  $t=0$ , приложена э. д. с.  $E \sin nt$  с резонансной частотой. Показать, что ток равен  $\frac{E}{2L} t \sin nt$ , где  $n^2 = \frac{1}{LC}$ .

**739.** К сопротивлению  $R$ , обладающему индуктивностью  $L$ , приложена э. д. с.  $E \sin(\omega t + \alpha)$ . Начальный ток равен нулю. Показать, что ток равен

$$E \{ \sin(\gamma - \alpha) e^{-\frac{Rt}{L}} + \sin(\omega t + \alpha - \gamma) \} (R^2 + L^2 \omega^2)^{-\frac{1}{2}},$$

где  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega L}{R}$ .

**740.** К цепи, в которую последовательно включены  $L$ ,  $R$ ,  $C$  с начальными током и зарядом, равными нулю, приложена э. д. с., равная  $E_1$  при  $0 < t \leq T$  и  $E_2$  при  $t > T$ ;  $E_1, E_2$  — постоянные. Показать, что при  $t > T$  ток в цепи равен

$$\frac{E_1}{nL} e^{-\mu t} \sin nt - \frac{E_1 - E_2}{nL} e^{-\mu(t-T)} \sin n(t-T),$$

где  $\mu = \frac{R}{2L}$  и  $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ , причем предполагается, что  $n^2 > 0$ .

741. Цепь, состоящая из индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и емкости  $C$ , соединенных последовательно, включается на постоянную э. д. с.  $E$ . Начальный заряд и ток равны нулю. Показать, что ток  $I$  в момент времени  $t$  равен

$$I = \begin{cases} \frac{E}{nL} e^{-\mu t} \sin nt & \text{при } n^2 > 0, \\ \frac{E}{L} t e^{-\mu t} & \text{при } n^2 = 0, \end{cases}$$

где  $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ ,  $\mu = \frac{R}{2L}$ .

Решение некоторых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Пусть имеем уравнение

$$a_0(t) x^{(n)}(t) + a_1(t) x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t) x(t) = f(t), \quad (7)$$

где  $a_0(t)$ ,  $a_1(t)$ , ...,  $a_n(t)$  — многочлены от  $t$  степени  $\leq m$ , а  $f(t)$  — функция-оригинал. Будем предполагать, что задача Коши

$$x|_{t=0} = x_0, \quad x'|_{t=0} = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}|_{t=0} = x_0^{(n-1)} \quad (8)$$

для уравнения (7) имеет решение.

Пусть

$$x(t) \doteq X(p).$$

В силу теоремы о дифференцировании изображения

$$t^k x^{(s)}(t) \doteq$$

$$\doteq (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} \{L\{x^{(s)}(t)\}\} = (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} [p^s X(p) - p^{s-1} x_0 - \dots - x_0^{(s-1)}].$$

Здесь  $L\{x^{(s)}(t)\}$  — изображение функции  $x^{(s)}(t)$ .

Таким образом, применяя к обеим частям уравнения (7) преобразование Лапласа, мы превратим (7) в дифференциальное уравнение  $m$ -го порядка относительно изображения  $X(p)$  функции  $x(t)$ . Если  $m < n$ , то задача интегрирования уравнения (7) упрощается.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$tx'' - 2x' = 0. \quad (9)$$

Решение. Пусть  $x(t) \doteq X(p)$ . Тогда

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0),$$

$$x''(t) \doteq p^2X(p) - px(0) - x'(0),$$

$$tx''(t) \doteq -\frac{d}{dp} \{p^2X(p) - px(0) - x'(0)\} = -p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0).$$



Уравнение (9) принимает вид

$$-p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0) - 2pX(p) + 2x(0) = 0$$

или

$$\frac{dX(p)}{dp} + \frac{4}{p} X(p) = \frac{3x(0)}{p^2}.$$

Интегрируя это уравнение как линейное неоднородное уравнение относительно  $X(p)$ , найдем

$$X(p) = \frac{x(0)}{p} + \frac{C_1}{p^4},$$

откуда

$$x(t) = x(0) + C_1 \frac{t^3}{3!}$$

есть решение исходного уравнения.

Пример 5. Рассмотрим уравнение Бесселя

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - n^2)x(t) = 0 \quad (t > 0, n - \text{целое}) \quad (10)$$

и будем искать решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = x_1$ .

Пусть  $x(t) \doteq X(p)$ . Тогда

$$x'(t) \doteq pX(p) - x_0, \quad x''(t) \doteq p^2X(p) - px_0 - x_1.$$

Далее

$$t^2 x''(t) \doteq \frac{d^2}{dp^2} [p^2X(p) - px_0 - x_1] = \frac{d^2}{dp^2} [p^2X(p)],$$

$$tx'(t) \doteq -\frac{d}{dp} [pX(p) - x_0] = -\frac{d}{dp} [pX(p)],$$

и уравнение (10) перейдет в следующее:

$$\frac{d^2}{dp^2} [p^2X(p)] - \frac{d}{dp} [pX(p)] + \frac{d^2X(p)}{dp^2} - n^2X(p) = 0$$

или

$$(1 + p^2) \frac{d^2X(p)}{dp^2} + 3p \frac{dX(p)}{dp} + (1 - n^2)X(p) = 0. \quad (11)$$

Для решения уравнения (11) введем новую независимую переменную и новую искомую функцию формулами

$$p = \text{sh } u, \quad X(p) = \frac{z}{\text{ch } u}.$$

Уравнение (11) перейдет при этом в следующее:

$$\frac{d^2z}{du^2} - n^2z = 0.$$

Его общее решение

$$z = C_1 e^{nu} + C_2 e^{-nu}.$$

Поскольку  $p = \operatorname{sh} u$ , получим  $\operatorname{ch} u = \sqrt{p^2 + 1}$ . Учитывая выражения для  $\operatorname{sh} u$  и  $\operatorname{ch} u$  через показательные функции, находим

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = p, \quad \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \sqrt{p^2 + 1},$$

откуда

$$e^u = \sqrt{p^2 + 1} + p, \quad e^{-u} = \sqrt{p^2 + 1} - p,$$

так что

$$z = C_1 (\sqrt{p^2 + 1} + p)^n + C_2 (\sqrt{p^2 + 1} - p)^n.$$

Для  $X(p)$  получаем

$$X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u} = \frac{C_1 (\sqrt{p^2 + 1} + p)^n + C_2 (\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}. \quad (12)$$

При  $n=0$  из (12) найдем

$$X(p) = \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{p^2 + 1}} \doteq (C_1 + C_2) J_0(t).$$

Выбирая  $C_1 + C_2 = 1$ , получим решение  $x(t) = J_0(t)$  — бesselеву функцию первого рода порядка нуля.

Полагая  $n=1$  и выбирая  $C_1=0$ ,  $C_2=1$ , получим решение  $x(t) = J_1(t)$  уравнения (10).

Найти решения уравнений:

742.  $tx'' + (2t - 1)x' + (t - 1)x = 0.$

743.  $tx'' + 2x' = 0.$

744.  $x'' + (t + 1)x' + tx = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = -1.$

745.  $x'' + (t + b)x' = 0$ ,  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = 0$  ( $b$  — любое действительное число).

746.  $x'' + tx' - (t + 1)x = 0$ ,  $x(0) = x'(0) = 1.$

747.  $x'' - tx' + nx = 0$ ,  $n$  — целое,  $n > 0$  (уравнение Чебышева — Эрмита):

а)  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $n = 2k$ ;

б)  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ ,  $n = 2k + 1.$

## § 16. Интеграл Дюамеля

Если функция  $f(t)$  непрерывна на  $[0, +\infty)$ , а функция  $\varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[0, +\infty)$  и

$$F(p) \doteq f(t), \quad \Phi(p) \doteq \varphi(t),$$

то

$$F(p)\Phi(p) \doteq \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда по теореме о дифференцировании оригинала

$$pF(p)\Phi(p) \doteq f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau) d\tau. \quad (1)$$

Это — так называемая *формула Дюамеля*.

Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами  $n$ -го порядка

$$L[x] \equiv a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t), \quad a_0 \neq 0, \quad (2)$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (3)$$

Допустим, что известно решение уравнения

$$L[x] = 1 \quad (4)$$

с той же левой частью и правой частью, равной единице, при условиях (3). Переходя к операторным уравнениям, будем иметь  $A(p)$  — известный многочлен от  $p$ )

$$A(p)X(p) = F(p) \quad (5)$$

для (2) и

$$A(p)X_1(p) = \frac{1}{p} \quad (6)$$

для (4). Из (5) находим  $X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}$ , а из (6)  $A(p) = \frac{1}{pX_1(p)}$ , откуда  $X(p) = pX_1(p)F(p)$  Согласно формуле (1)

$$pX_1(p)F(p) \doteq f(t)x_1(0) + \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau) d\tau. \quad (7)$$

Учитывая, что  $x_1(0) = 0$ , получаем

$$X(p) = pX_1(p)F(p) \doteq \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau) d\tau. \quad (8)$$

Отсюда решение  $x(t)$  уравнения (2) при нулевых начальных условиях (3) будет иметь вид

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau) d\tau, \quad (9)$$

где  $x_1(t)$  — решение задачи (4) — (3).

**Пример 1.** Используя формулу Дюамеля, решить уравнение при заданных начальных условиях

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

**Решение.** Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x_1''(t) - x_1(t) = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Применяя операционный метод, находим

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)},$$

откуда

$$x_1(t) = \int_0^t \operatorname{sh} \tau \, d\tau = \operatorname{ch} t - 1.$$

По формуле (9)

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + e^\tau} \operatorname{sh}(t - \tau) \, d\tau = \frac{1}{2} (e^t - te^t - 1) + \operatorname{sh} t \cdot \ln \frac{1 + e^t}{2}.$$

Требование, чтобы начальные условия были нулевыми, является несущественным: простой заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями. Покажем это на примере дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пусть ищется решение уравнения

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \quad (10)$$

удовлетворяющее ненулевым начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

Положим

$$y(t) = x(t) - x_0 - x_1 t. \quad (11)$$

Тогда

$$y'(t) = x'(t) - x_1, \quad y''(t) = x''(t),$$

и уравнение (10) преобразуется к виду

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_1(t),$$

где

$$f_1(t) = f(t) - a_1 x_1 - a_2 x_0 - a_2 x_1 t.$$

Далее, в силу (11)

$$y(0) = x(0) - x_0 = 0, \quad y'(0) = x'(0) - x_1 = 0.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче Коши:

$$\begin{aligned} a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) &= f_1(t), \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0 \end{aligned}$$

с нулевыми начальными условиями.

**Пример 2.** С помощью формулы Дюамеля решить следующую задачу Коши:

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t, \quad (12)$$

$$x(0) = -2, \quad x'(0) = 1. \quad (13)$$

**Решение.** Сводим задачу (12) — (13) к задаче с нулевыми начальными условиями. Для этого полагаем

$$y(t) = x(t) + 2 - t.$$

Тогда

$$y'(t) = x'(t) - 1, \quad y''(t) = x''(t),$$

и уравнение (12) преобразуется в следующее:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2},$$

где

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Решая последнюю задачу с помощью формулы Дюамеля, найдем

$$y = e^{-t} [t - \ln(1+t)].$$

Решение исходной задачи (12) — (13)

$$x(t) = e^{-t} [t - \ln(1+t)] - 2 + t.$$

С помощью формулы Дюамеля найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

$$748. \quad x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$749. \quad x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$750. \quad x'' - x' = \frac{e^{2t}}{2+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$751. \quad x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$752. \quad x'' + x = \frac{1}{2+\cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$753. \quad x'' + x = \frac{1}{4+\operatorname{tg}^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$754. \quad x'' + x = \frac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$755. \quad x'' + x = \frac{1}{1+\sin^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$756. \quad x'' - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$757. \quad x''' + x' = \frac{1}{2+\sin t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

## § 17. Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом производится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения.

Пусть, например, нужно решить систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^n \left( a_{ik} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + b_{ik} \frac{dx_k}{dt} + c_{ik} x_k \right) = f_i(t) \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} = \text{const}$ , при начальных условиях

$$x_k(0) = \alpha_k, \quad x'_k(0) = \beta_k. \quad (2)$$

Обозначая через  $X_k(p)$  и  $F_i(p)$  изображения  $x_k(t)$  и  $f_i(t)$ , от системы (1) с учетом (2) перейдем к операторной системе

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} p^2 + b_{ik} p + c_{ik}) X_k(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^n [(a_{ik} p + b_{ik}) \alpha_k + a_{ik} \beta_k] \quad (3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Решая систему (3) как линейную алгебраическую систему уравнений относительно  $X_k(p)$ , найдем  $X_k(p)$ , а затем их оригиналы  $x_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Эти последние будут решениями задачи Коши для системы (1).

Пр и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x'' = 3(y - x + z), \\ y'' = x - y, \\ z'' = -z, \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1,$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 0.$$

Р е ш е н и е. Переходя к операторной системе, получим

$$\begin{cases} p^2 X = 3(Y - X + Z), \\ p^2 Y + 1 = X - Y, \\ p^2 Z - p = -Z, \end{cases}$$

где

$$X(p) \doteq x(t), \quad Y(p) \doteq y(t); \quad Z(p) \doteq z(t).$$

Решая последнюю систему относительно  $X(p)$ ,  $Y(p)$  и  $Z(p)$ , получим

$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}, \quad Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1},$$

$$Z(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Находя оригиналы для  $X(p)$ ,  $Y(p)$ ,  $Z(p)$ , получаем

$$x(t) = \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4} \cos 2t + \frac{3}{8} \sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4} \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t - \cos t,$$

$$z(t) = \cos t.$$

Решить системы уравнений:

$$758. \begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

$$759. \begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

$$760. \begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

$$761. \begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \end{cases} \quad x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$762. \begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

$$763. \begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases} \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$764. \begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

$$765. \begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, \\ z' = x + y + z + 4, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0.$$

$$766. \begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$$

$$767. \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$$





**779.** Определить движение тяжелой материальной точки, брошенной с начальной скоростью  $\mathbf{v}_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости ( $F = mk\mathbf{v}$ ).

**780.** Частица массы  $m$  с зарядом  $e$  вылетает из начала координат со скоростью  $(u, 0, 0)$ . На нее действует постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}$ , параллельное оси  $Oz$ , и сопротивление среды  $km\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость частицы. Показать, что ее координаты в момент времени  $t$  равны

$$x = \frac{kue^{-kt}}{k^2 + \lambda^2} \left( e^{kt} - \cos \lambda t + \frac{\lambda}{k} \sin \lambda t \right),$$

$$y = -\frac{\lambda u}{k^2 + \lambda^2} + \frac{ue^{-kt}}{k^2 + \lambda^2} (\lambda \cos \lambda t + k \sin \lambda t),$$

где  $\lambda = \frac{eH}{mc}$ ,  $c$  — скорость света.

**781.** Частица движется в сопротивляющейся среде, действующей на нее с силой  $F = 2\lambda\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость частицы, и притягивается к точке  $(0, 0)$  с силой  $\mu^2 r$  ( $m=1$ ). В точке  $(a, 0)$  частица обладает скоростью  $v_0$ , параллельной оси  $Oy$ . Показать, что при  $\mu > \lambda$  траектория частицы определяется уравнениями

$$x = ae^{-\lambda t} \left[ \cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right],$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t,$$

где  $\omega = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$ ;  $r$  — расстояние движущейся точки от точки  $(0, 0)$ .

**782.** Материальная точка  $A$  с массой  $m$ , находившаяся на расстоянии  $a$  от оси  $Ox$ , получила начальную скорость  $\mathbf{v}_0$ , параллельную оси  $Ox$ . Точка  $A$  притягивается осью  $Ox$  с силой  $F$ , прямо пропорциональной расстоянию от нее; коэффициент пропорциональности равен  $mk^2$ . Найти уравнения движения и траекторию точки.

## § 18. Решение интегральных уравнений Вольтерра с ядрами специального вида

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Например, решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

как известно, сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$y = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx + y_0.$$

Если искомая функция  $y$  входит в уравнение линейно, то интегральное уравнение называется *линейным*.

Уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt \quad (1)$$

( $a$  и  $b$  — постоянные) называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода*. Здесь  $K(x, t)$ ,  $f(x)$  — заданные функции,  $y(x)$  — искомая функция. Функцию  $K(x, t)$  называют *ядром уравнения* (1).

Уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y(t) dt \quad (2)$$

называют *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода*.

Если в уравнениях (1) и (2)  $f(x) \equiv 0$ , то уравнения называются *однородными*.

Если искомая функция  $y(x)$  входит только под знак интеграла, то имеем соответственно *уравнения Фредгольма или Вольтерра первого рода*

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad \text{или} \quad \int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x).$$

Уравнения вида

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (3)$$

с ядром  $K(x-t)$ , зависящим лишь от разности аргументов, представляют собой важный класс уравнений Вольтерра. Они иногда называются уравнениями *типа свертки*.

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра типа свертки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt. \quad (4)$$

Будем предполагать, что  $f(x)$  и  $K(x)$  достаточно гладкие функции и имеют конечный порядок роста при  $x \geq 0$ . В этом случае и  $\varphi(x)$  при  $x \geq 0$  имеет конечный порядок роста, а значит, может быть найдено изображение функций  $f$ ,  $K$  и  $\varphi$  (по Лапласу). Пусть  $\Phi(p) \doteq \varphi(x)$ ,  $F(p) \doteq f(x)$ ,  $L(p) \doteq K(x)$ . Применяя к обеим частям (4) преобразование Лапласа и пользуясь формулой свертки (см. § 14, IX), будем иметь

$$\Phi(p) = F(p) + L(p) \Phi(p), \quad (5)$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-L(p)}, \quad L(p) \neq 1. \quad (6)$$

Для  $\Phi(p)$  находим оригинал  $\varphi(x)$  — решение интегрального уравнения (4).

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt. \quad (7)$$

Решение. Переходя к изображениям и рассматривая интеграл как свертку функций, получим на основании правила изображения свертки

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} \Phi(p), \quad (8)$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}. \quad (9)$$

Находя оригинал для  $\Phi(p)$ , получим решение интегрального уравнения (7)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (\cos x + \operatorname{ch} x). \quad (10)$$

Решить интегральные уравнения:

$$783. \quad \varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt.$$

$$784. \quad \varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt.$$

$$785. \quad \varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$786. \quad \varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt.$$

$$787. \quad \varphi(x) = 1 + x + \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$788. \quad \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t) e^{-(t-x)} \varphi(t) dt.$$

$$789. \quad \varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt.$$

$$790. \varphi(x) = x + 2 \int_0^x [(x-t) - \sin(x-t)] \varphi(t) dt.$$

$$791. \varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$792. \varphi(x) =$$

$$= 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2] \varphi(t) dt.$$

$$793. \varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \sin 2(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$794. \varphi(x) = e^x - 2 \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$795. \varphi(x) = 1 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 \varphi(t) dt.$$

$$796. \varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$797. \varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) \varphi(t) dt.$$

Аналогично решаются интегральные уравнения Вольтерра первого рода с ядром  $K(x, t)$ , зависящим только от разности  $x-t$ , т. е. уравнения вида

$$\int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (11)$$

где  $f(x)$  — известная функция,  $\varphi(x)$  — искомая функция. При этом мы предполагаем  $K(x, x) \neq 0$ .

Пусть  $F(p) \doteq f(x)$ ,  $L(p) \doteq K(x)$ ,  $\Phi(p) \doteq \varphi(x)$ . Применяя к обеим частям (11) преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, будем иметь

$$L(p) \cdot \Phi(p) = F(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{L(p)}, \quad L(p) \neq 0.$$

Оригинал для  $\Phi(p)$  будет решением  $\varphi(x)$  интегрального уравнения (11).

Решить интегральные уравнения:

$$798. \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = x.$$

$$799. \int_0^x J_0(x-t) \varphi(t) dt = \sin x.$$

$$800. \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = \sin x.$$

$$801. \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = \sin x.$$

$$802. \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = x + x^2.$$

$$803. \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi(t) dt = x^2 e^x.$$

$$804. \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) \varphi(t) dt = \operatorname{sh} x.$$

$$805. \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) \varphi(t) dt = x.$$

Указанный метод решения уравнений (4), (11) приложим также к системам интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^s \int_0^x K_{ik}(x-t) \varphi_k(t) dt \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (12)$$

Применяя к обеим частям (12) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^s L_{ik}(p) \Phi_k(p) \quad (i=1, 2, \dots, s).$$

Решая эту систему уравнений, линейную относительно  $\Phi_i(p)$ , найдем  $\Phi_i(p)$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ), оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений (12).

Пример 2. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x e^{-(x-t)} \varphi_1(t) dt + \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi_1(t) dt - \int_0^x e^{(x-t)} \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

Решение. Переходя к изображениям и используя теорему о свертке, получим  $(\Phi_1(p) \doteq \varphi_1(x), \Phi_2(p) \doteq \varphi_2(x))$

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1} \Phi_1(p) + \frac{1}{p^2} \Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2-1} \Phi_1(p) - \frac{1}{p-1} \Phi_2(p), \end{cases}$$

откуда

$$\Phi_1(p) = \frac{p^2 + p - 1}{p(p-1)(p^2+1)}, \quad \Phi_2(p) = \frac{p^3 - p^2 + 1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)}.$$

Находим оригиналы для  $\Phi_1(p)$  и  $\Phi_2(p)$ :

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{3}{2} \cos x,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2} (\cos x + \operatorname{ch} x) - \sin x.$$

Система функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  является решением исходной системы интегральных уравнений.

Решить следующие системы интегральных уравнений:

$$806. \begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - 2 \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 4x - \int_0^x \varphi_1(t) dt + 4 \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

$$807. \begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(t) dt - \int_0^x e^{(x-t)} \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

$$808. \begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_1(t) dt + \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{(x-t)} \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

$$809. \begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int_0^x \varphi_1(t) dt + 4 \int_0^x e^{(x-t)} \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{-(x-t)} \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

$$810. \begin{cases} \varphi_1(x) = 2x - \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = -2 - 4 \int_0^x \varphi_1(t) dt + 3 \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

$$811. \begin{cases} \varphi_1(x) = 2 - \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt - 4 \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(t) dt - \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

### § 19. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом

В ряде технических задач приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями, в которые неизвестная функция входит при различных значениях аргумента, например:

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), x(t-\tau(t))), \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), x(t-\tau(t)), \dot{x}(t-\tau(t))), \quad (2)$$

$$\ddot{x}(t) = \varphi(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau_1(t)), \dot{x}(t-\tau_2(t))). \quad (3)$$

Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями с отклоняющимися аргументами*. Если  $\tau_i(t)$  — постоянные, то мы имеем так называемое *дифференциально-разностное уравнение*. Если  $\tau_i > 0$  и старшая производная входит в дифференциально-разностное уравнение только при одном значении аргумента, не меньшем всех других аргументов функций и производных, входящих в уравнение, то уравнение называется *дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом*.

Пусть дано дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t-\tau_k) + f(t), \quad (4)$$

где  $a_k = \text{const}$ ,  $\tau_k = \text{const} \geq 0$  ( $0 < t < +\infty$ ). Возьмем ради простоты нулевые начальные условия

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (5)$$

При этом мы полагаем

$$x(t) = x'(t) = \dots = x^{(n-1)}(t) \equiv 0 \quad \text{для } t < 0.$$

Применяя к обеим частям (4) преобразование Лапласа и пользуясь при этом теоремой запаздывания (см. § 14), получим операторное

уравнение для  $X(p) \doteq x(t)$ :

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-\tau_k p} + F(p), \quad \text{где } F(p) \doteq f(t), \quad (6)$$

откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \quad (7)$$

Находя  $x(t)$  — оригинал для  $X(p)$ , определяемого формулой (7), получаем решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям (5).

**Пример 1.** Решить уравнение

$$x'(t) = x(t-1) + 1, \quad x(0) = 0.$$

**Решение.** Переходя к изображениям, получим

$$pX(p) = X(p) e^{-p} + \frac{1}{p},$$

откуда

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p} \frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p}} = \\ &= \frac{1}{p^2} \left( 1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-np}}{p^n} + \dots \right). \end{aligned}$$

Для  $x(t)$  получаем

$$x(t) = t\eta(t) + \frac{1}{2!} (t-1)^2 \eta(t-1) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n+1)!} (t-n)^{n+1} \eta(t-n) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k).$$

Решить следующие уравнения:

$$812. \quad x''(t) - x(t-1) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$813. \quad x''(t) - 2x'(t-1) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$814. \quad x''(t) = 2x'(t-1) - x(t-2) + 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$815. \quad x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих процесс с последствием, часто встречаются задачи в следующей постановке:

Найти решение уравнения  $x(t)$  для  $t \geq t_0$ , причем для всех  $t \leq t_0$ , для которых значения  $x(t)$  влияют на последующие значения решения при  $t \geq 0$ , функция  $x(t)$  задается.

Так, например, ставится задача: найти непрерывное решение  $x(t)$  при  $t \geq t_0$  уравнения

$$x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad \tau > 0 = \text{const},$$

если дано, что  $x(t) = \varphi(t)$  для  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ .



Здесь  $\varphi(t)$  — заданная непрерывная функция, называемая *начальной функцией*. Отрезок  $[t_0 - \tau, t_0]$ , на котором задается функция  $\varphi(t)$ , называется *начальным множеством*.

Решение линейного уравнения (4) с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием в случае, когда начальная функция отлична от тождественного нуля, также можно искать, используя преобразование Лапласа. Покажем это на примере.

**Пример 2.** Решить уравнение

$$x'(t) = x(t-1), \quad \varphi(t) \equiv 1, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

**Решение.**

$$x(t) = X(p), \quad x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

Применяя к обеим частям исходного уравнения преобразование Лапласа, найдем

$$pX(p) - 1 = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t-1) dt.$$

Делая замену переменных  $t-1 = z$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t-1) dt &= \int_{-1}^{\infty} e^{-p(z+1)} x(z) dz = \\ &= e^{-p} \int_{-1}^0 e^{-pz} x(z) dz + e^{-p} \int_0^{\infty} e^{-pz} x(z) dz = \\ &= e^{-p} \frac{e^{-pz}}{-p} \Big|_{z=-1}^{z=0} + e^{-p} X(p), \end{aligned}$$

так как  $x(z) \equiv 1$  для  $-1 \leq z \leq 0$ . Окончательно

$$pX(p) - 1 = \frac{1 - e^{-p}}{p} + e^{-p} X(p).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p - e^{-p}} + \frac{1 - e^{-p}}{p(p - e^{-p})} = \frac{1}{p \left(1 - \frac{e^{-p}}{p}\right)} + \frac{1 - e^{-p}}{p^2 \left(1 - \frac{e^{-p}}{p}\right)} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \dots\right) + \\ &+ \frac{(1 - e^{-p})}{p^2} \left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^3} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^{k+2}} + \dots \end{aligned}$$

Находя оригинал для  $X(p)$ , получаем решение исходного уравнения

$$x(t) = (1 + t) \eta(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(t-k+1)^k}{k!} \eta(t-k+1).$$

Решить следующие уравнения:

$$816. \quad x'(t) = x(t-1), \quad \varphi(t) = t, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

$$817. \quad x'(t) = x(t-1) + t, \quad \varphi(t) \equiv 1, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

$$818. \quad x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \varphi(t) = \cos t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0.$$

## § 20. Решение некоторых задач математической физики

Ограничимся случаем, когда искомая функция  $u$  зависит от двух независимых переменных  $x$  и  $t$ . Переменную  $x$  будем рассматривать как пространственную координату, переменную  $t$  — как время.

Рассмотрим, например, уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

( $a^2$  — постоянная).

Разберем первую краевую задачу для уравнения (1): найти решение  $u(x, t)$  дифференциального уравнения (1) для  $0 \leq x \leq l$  и  $t \geq 0$ , удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t). \quad (3)$$

Предположим, что  $u(x, t)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $f(x, t)$ , рассматриваемые как функции  $t$ , являются оригиналами. Обозначим через

$$U(p, x) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt \quad (4)$$

изображение функции  $u(x, t)$ . Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (5)$$

По правилу дифференцирования оригиналов получаем с учетом начального условия (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = pU - \varphi(x). \quad (6)$$

Предположим, что  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  являются оригиналами и

$$\psi_1(t) = \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) = \Psi_2(p). \quad (7)$$

Тогда граничные условия (3) дают

$$U|_{x=0} = \Psi_1(p), \quad U|_{x=l} = \Psi_2(p). \quad (8)$$

Таким образом, операторный метод приводит решение задачи (1), (2), (3) к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x, p) = 0 \quad (9)$$

при граничных условиях (8), где  $F(x, p) := f(x, t)$ . Решая задачу (9), (8) и обращая полученное решение, найдем функцию  $u(x, t)$ , являющуюся решением задачи (1), (2), (3). Аналогично решаются и другие краевые задачи для уравнения теплопроводности, а также краевые задачи для уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (10)$$

телеграфного уравнения (см. [2] и [9])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = 0 \quad (11)$$

и некоторых других уравнений более общего вида.

**З а д а ч а.** Концы струны  $x=0$  и  $x=l$  закреплены жестко. Начальное отклонение задано равенством  $u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}$  ( $0 \leq x \leq l$ ).

Начальные скорости равны нулю. Найти отклонения  $u(x, t)$  при  $t > 0$ .

**Р е ш е н и е.** Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

и краевых условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (14)$$

Переходя к изображениям, будем иметь

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{pA}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (15)$$

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0. \quad (16)$$

Решая уравнение (15), найдем

$$U(x, p) = C_1 e^{px/a} + C_2 e^{-px/a} + \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Учитывая краевые условия (16), найдем

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Оригиналом для  $U(x, p)$  является функция

$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi x}{l},$$

которая будет решением поставленной задачи.

Решить следующие задачи:

$$819. \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0), \quad u(0, t) = u_0, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$820. \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0), \quad u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_1.$$

$$821. \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0),$$

$$u(0, t) = a \cos \omega t, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$822. \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0),$$

$$u(0, t) = a \sin \omega t, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$823. \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0),$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x, 0) = 0.$$

824. Найти распределение температур в стержне  $0 \leq x \leq l$  при условии, что поток тепла не проходит через границу  $x=0$ ; другая граница  $x=l$  сохраняет постоянную температуру  $u_1$ ; начальная температура стержня равна  $u_0 = \text{const}$ .

825. Найти распределение температур в полуограниченном стержне, если на левом конце стержня происходит теплоизлучение в среду с нулевой температурой. Начальная температура стержня  $u_0 = \text{const}$ .

826. Стержень длины  $l$  находится в состоянии покоя, его конец  $x=0$  закреплен. В момент времени  $t=0$  к свободному концу стержня приложена сила  $F$  (на единицу площади), направленная вдоль стержня. Найти колебание стержня.

827. Стержень подвешен вертикально и защемлен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент времени  $t=0$  стержень освобождается, оставаясь закрепленным в верхней точке. Найти закон колебания стержня.

828. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

**829.** Однородная струна, закрепленная на концах  $x=0$  и  $x=l$ , имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку  $x=l/2$ . Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

## § 21. Дискретное преобразование Лапласа

Пусть имеем комплекснозначную функцию  $f(t)$  действительного аргумента  $t$ , определенную для  $t \geq 0$ .

Рассмотрим последовательность  $\{f(n)\}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), которую коротко будем обозначать просто  $f(n)$  и называть *решетчатой функцией*. Функция  $f(t)$  называется *порождающей функцией* для  $f(n)$ . Таким образом, аргумент решетчатой функции принимает только целые значения, причем для отрицательных значений аргумента решетчатая функция равна нулю.

*Дискретным преобразованием Лапласа* решетчатой функции  $f(n)$  будем называть функцию  $F^*(p)$  комплексного аргумента  $p=s+is$ , определяемую равенством

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} f(n); \quad (1)$$

предполагается, что ряд справа сходится.

Функцию  $f(n)$  будем называть оригиналом, а  $F^*(p)$  — ее изображением и писать

$$F^*(p) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} f(n) \quad \text{или} \quad f(n) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F^*(p).$$

Значение  $\operatorname{Re} p = s^*$ , для которого при  $\operatorname{Re} p = s > s^*$  ряд (1) сходится, а при  $s < s^*$  расходится, называется *абсциссой сходимости*. Функция  $F^*(p)$  есть периодическая функция с периодом  $2\pi i$ , аналитическая в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s^*$ .

Если решетчатая функция  $f(n)$  удовлетворяет условию

$$|f(n)| \leq M e^{\lambda_0 n}, \quad (2)$$

то абсцисса сходимости  $s^* > \lambda_0$ , и, следовательно, изображение такой функции существует. Вообще, всякая функция  $f(t)$ , являющаяся оригиналом для обычного преобразования Лапласа, порождает решетчатую функцию  $f(n)$ , для которой определено дискретное преобразование Лапласа  $F^*(p)$ .

**Пример 1.** Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(n) = e^{-n}.$$

Решение. Очевидно, эта функция удовлетворяет условию (2) с  $\lambda_0 = 1$  и произвольным  $M > 1$ . Значит, ее изображение существует. По формуле (1) находим

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+p)n} = \frac{1}{1 - e^{-(1+p)}} \quad (\operatorname{Re} p > -1). \quad (3)$$

Отметим, что решетчатая функция  $f(n) = e^{n^2}$  изображения не имеет, так как для нее абсцисса сходимости  $s^*$  равна бесконечности.

Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

$$830. f(n) = \eta(n), \text{ где } \eta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n > 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

$$831. f(n) = n.$$

$$832. f(n) = e^{\alpha n}.$$

$$833. f(n) = a^n \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Основные свойства дискретного преобразования Лапласа

I. Свойство линейности. Для любых комплексных постоянных  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \doteq \alpha F^*(p) + \beta G^*(p).$$

(Здесь и всюду в дальнейшем  $f(n) \doteq F^*(p)$ ,  $g(n) \doteq G^*(p)$ .)

Пример 2. Найти изображение функции  $f(n) = \sin n$ .

Решение. По формулам Эйлера

$$\sin n = \frac{e^{in} - e^{-in}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{in} - \frac{1}{2i} e^{-in}.$$

Имеем

$$e^{in} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} e^{in} = \frac{1}{1 - e^{-(p-i)}},$$

$$e^{-in} \doteq \frac{1}{1 - e^{-(p+i)}}.$$

По свойству линейности

$$\sin n \doteq \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{1 - e^{-(p-i)}} - \frac{1}{1 - e^{-(p+i)}} \right) = \frac{e^p \sin 1}{e^{2p} - 2e^p \cos 1 + 1}.$$

Найти изображения следующих функций:

$$834. f(n) = \cos n.$$

$$835. f(n) = \sin \alpha n \quad (\alpha = \text{const}).$$

$$836. f(p) = \operatorname{sh} n.$$

$$837. f(n) = e^n - 2e^{n/2}.$$

$$838. f(n) = \cos^2 n.$$

II. Теоремы опережения и запаздывания. Пусть  $f(n) \doteq F^*(p)$ , и пусть  $k$  — целое положительное число. Тогда

$$f(n+k) \doteq e^{kp} \left[ F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-mp} f(m) \right]. \quad (4)$$

В частности, если  $f(0) = f(1) = \dots = f(k-1) = 0$ , то

$$f(n+k) \doteq e^{kp} F^*(p). \quad (5)$$

Аналогично,

$$f(n-k) \doteq e^{-kp} F^*(p) \quad (f(n-k) \equiv 0 \text{ для } n < k). \quad (6)$$

Пример 3. Найти изображение функции  $f(n) = e^{n-2}$  ( $f(n) \equiv 0$  при  $n < 2$ ).

Решение. Имеем

$$e^n \doteq \frac{1}{1 - e^{1-p}} = \frac{e^p}{e^p - e}.$$

По теореме запаздывания из (6) находим

$$e^{n-2} \doteq e^{-2p} \frac{e^p}{e^p - e} = \frac{1}{e^p (e^p - e)}.$$

Найти изображения следующих функций:

839.  $f(n) = \eta(n-k)$ .

840.  $f(n) = e^{\alpha(n+3)}$ .

841.  $f(n) = \text{sh } 2(n-1) \cdot \eta(n-1)$ .

842.  $f(n) = (n+2)^2$ .

III. Теорема смещения. Если  $F^*(p) \doteq f(n)$ , то для любого комплексного  $p_0$

$$F^*(p-p_0) \doteq e^{p_0 n} f(n). \quad (7)$$

Пример 4. Найти изображение функции  $f(n) = n e^{2n}$ .

Решение. Имеем

$$n \doteq \frac{e^{-p}}{(1 - e^{-p})^2}.$$

По теореме смещения получаем ( $p_0 = 2$ )

$$e^{2n} n \doteq \frac{e^{-(p-2)}}{[1 - e^{-(p-2)}]^2}.$$

Найти изображения следующих функций:

843.  $f(n) = e^{-n} \sin 2n$ .

844.  $f(n) = n^2 e^{2n}$ .

845.  $f(n) = e^{3n} \text{ch } n$ .

IV. Дифференцирование изображения. Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на  $-n$ :

$$\frac{d}{dp} \{F^*(p)\} \doteq -n f(n), \quad (8)$$

вообще,

$$\frac{d^k}{dp^k} \{F^*(p)\} \div (-1)^k n^k f(n). \quad (9)$$

**Пример 5.** Найти изображение функции  $f(n) = ne^n$ .  
**Решение.** Имеем

$$e^n \div \frac{e^p}{e^p - e}.$$

По теореме о дифференцировании изображения получим

$$ne^n \div -\frac{d}{dp} \left( \frac{e^p}{e^p - e} \right) = \frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2}.$$

Найти изображения следующих функций:

846.  $f(n) = n^2 e^n$ .

847.  $f(n) = n^2$ .

848.  $f(n) = n \sin \left( n \frac{\pi}{2} \right)$ .

**V. Теорема об интегрировании изображения.**  
*Пусть решетчатая функция  $f(n)$  удовлетворяет условиям*

$$f(0) = 0, \quad \left. \frac{f(t)}{t} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t)}{t} = 0. \quad (10)$$

Тогда

$$\frac{f(n)}{n} \div \int_p^\infty F^*(p) dp, \quad (11)$$

*т. е. деление оригинала на  $n$  соответствует интегрированию изображения в пределах от  $p$  до  $\infty$ .*

**Замечания.** а) При  $f(0) \neq 0$  интеграл в правой части (11) будет расходящимся и, значит, теорема об интегрировании изображения не будет справедлива.

б) Если

$$\left. \frac{f(t)}{t} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t)}{t} = a \neq 0,$$

то

$$\frac{f(n)}{n} \div a + \int_p^\infty F^*(p) dp. \quad (12)$$

в) Если для  $m = 1, 2, \dots, k$  выполнены условия

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t)}{t^m} = 0,$$

то

$$\frac{f(n)}{n^k} \div \underbrace{\int_p^\infty \dots \int_p^\infty}_{k} F^*(p) dp \dots dp, \quad (13)$$



т. е. деление оригинала на  $n^k$  соответствует  $k$ -кратному интегрированию изображения от  $p$  до  $\infty$ .

**Пример 6.** Найти изображение решетчатой функции  $\frac{e^n - 1 - n}{n}$ .

**Решение.** Пусть  $f(n) = e^n - 1 - n$ .

Проверяем выполнимость условий (10). Имеем

$$f(0) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{e^t - 1 - t}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{e^t - 1}{t} - 1 \right) = 1 - 1 = 0.$$

Находим изображение функции

$$e^n - 1 - n \div \frac{e^p}{e^p - e} - \frac{e^p}{e^p - 1} - \frac{e^p}{(e^p - 1)^2}.$$

Так как условия (10) выполнены, то

$$\begin{aligned} \frac{e^n - 1 - n}{n} \div \int_p^\infty \left[ \frac{e^p}{e^p - e} - \frac{e^p}{e^p - 1} - \frac{e^p}{(e^p - 1)^2} \right] dp = \\ = \left[ \ln(e^p - e) - \ln(e^p - 1) + \frac{1}{e^p - 1} \right] \Big|_p^\infty = \\ = \left[ \ln \frac{e^p - e}{e^p - 1} + \frac{1}{e^p - 1} \right] \Big|_p^\infty = \ln \frac{e^p - 1}{e^p - e} - \frac{1}{e^p - 1}. \end{aligned}$$

**Пример 7.** Найти изображение решетчатой функции  $\frac{\text{sh } \alpha n}{n}$  ( $\alpha \neq 0$ ).

**Решение.** Пусть  $f(n) = \text{sh } \alpha n$ . Имеем

$$f(0) = 0; \quad \left. \frac{f(t)}{t} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\text{sh } \alpha t}{t} = \alpha \neq 0.$$

Изображение функции  $f(n)$

$$\text{sh } \alpha n \div \frac{1}{2} \left( \frac{e^p}{e^p - e^\alpha} - \frac{e^p}{e^p - e^{-\alpha}} \right).$$

Изображение данной функции найдем, используя соотношение (12):

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh } \alpha n}{n} \div \alpha + \frac{1}{2} \int_p^\infty \left( \frac{e^p}{e^p - e^\alpha} - \frac{e^p}{e^p - e^{-\alpha}} \right) dp = \\ = \alpha + \frac{1}{2} \left[ \ln(e^p - e^\alpha) - \ln(e^p - e^{-\alpha}) \right] \Big|_p^\infty = \\ = \alpha + \frac{1}{2} \ln \frac{e^p - e^\alpha}{e^p - e^{-\alpha}} \Big|_p^\infty = \alpha + \frac{1}{2} \ln \frac{e^p - e^\alpha}{e^p - e^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Найти изображения следующих функций:

849.  $\frac{a^n - 1}{n}$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). 850.  $\frac{\sin \alpha n}{n}$  ( $\alpha \neq 0$ ).

851.  $\frac{1 - \cos \alpha n}{n}$ .

852.  $\frac{n - \operatorname{sh} n}{n}$ .

VI. Дифференцирование по параметру. Пусть оригинал и изображение содержат параметр  $\varepsilon$ , не зависящий от  $n$  и  $p$ , и пусть

$$F^*(p, \varepsilon) \doteq f(n, \varepsilon).$$

Тогда

$$\frac{\partial F^*(p, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \doteq \frac{\partial f(n, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad (14)$$

т. е. производная по  $\varepsilon$  от изображения есть изображение производной по  $\varepsilon$  от оригинала. Предполагаем, что все эти производные существуют и  $\frac{\partial f(n, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}$  есть оригинал.

Пример 8. Найти изображение  $ne^{\alpha n}$  ( $\alpha$  — вещественное).

Решение. Имеем  $e^{\alpha n} \doteq \frac{e^p}{e^p - e^\alpha}$ . Примем  $\alpha$  в качестве параметра. На основе теоремы о дифференцировании по параметру

$$\left( \frac{e^p}{e^p - e^\alpha} \right)'_{\alpha} \doteq (e^{\alpha n})'_{\alpha} = ne^{\alpha n}.$$

Отсюда

$$ne^{\alpha n} \doteq \frac{e^p e^\alpha}{(e^p - e^\alpha)^2}.$$

Найти изображения следующих функций:

853.  $f(n) = n \cos \alpha n$ .

854.  $f(n) = n^2 \operatorname{sh} \alpha n$ .

855.  $f(n) = (n + 2) \operatorname{ch} \alpha n$ .

VII. Интегрирование по параметру. Если  $f(n, \varepsilon) \doteq F^*(p, \varepsilon)$ , где параметр  $\varepsilon$  не зависит от  $n$  и  $p$  ( $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \lambda$ ), то

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} f(n, \varepsilon) d\varepsilon \doteq \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F^*(p, \varepsilon) d\varepsilon, \quad (15)$$

т. е. интегрирование по параметру  $\varepsilon$  оригинала соответствует интегрированию изображения по параметру  $\varepsilon$ .

Пример 9. С помощью интегрирования по параметру найти изображение решетчатой функции  $\frac{1 - \cos \varepsilon n}{n}$ .

Решение. Имеем

$$\sin \varepsilon n \doteq \frac{e^p \sin \varepsilon}{e^{2p} - 2e^p \cos \varepsilon + 1}.$$

Интегрируем левую и правую части этого соотношения по параметру  $\varepsilon$  в пределах от  $\varepsilon_0 = 0$  до  $\varepsilon$ :

$$\int_0^{\varepsilon} \sin \varepsilon n d\varepsilon \doteq \int_0^{\varepsilon} \frac{e^p \sin \varepsilon d\varepsilon}{e^{2p} - 2e^p \cos \varepsilon + 1}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \varepsilon n}{n} &\div \frac{1}{2} \ln (e^{2p} - 2e^p \cos \varepsilon + 1) \Big|_0^\varepsilon = \\ &= \frac{1}{2} [\ln (e^{2p} - 2e^p \cos \varepsilon + 1) - \ln (e^{2p} - 2e^p + 1)]. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{1 - \cos \varepsilon n}{n} \div \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2p} - 2e^p \cos \varepsilon + 1}{(e^p - 1)^2}.$$

Применяя интегрирование по параметру, найти изображения следующих функций:

$$856. \frac{e^{\varepsilon n} - e^{\varepsilon_0 n}}{n}, \quad 857. \frac{\operatorname{ch} \varepsilon n - \operatorname{ch} n}{n}.$$

$$858. \frac{\sin \varepsilon n}{n}, \quad 859. \frac{\sin (\varepsilon - 1) n \cdot \cos (\varepsilon + 1) n}{n}.$$

Теорема умножения изображений. Пусть

$$f_1(n) \div F_1^*(p), \quad f_2(n) \div F_2^*(p).$$

Тогда

$$F_1^*(p) \cdot F_2^*(p) \div \sum_{m=0}^n f_1(n-m) f_2(m) = \sum_{m=0}^n f_1(m) f_2(n-m). \quad (16)$$

Пример 10. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^p - e)(e^p - e^{-1})}.$$

Решение. Изображение  $F^*(p)$  можно представить в виде произведения двух изображений

$$F_1^*(p) = \frac{e^p}{e^p - e} \div e^n, \quad F_2^*(p) = \frac{e^p}{e^p - e^{-1}} \div e^{-n}.$$

По теореме умножения

$$F^*(p) \div \sum_{m=0}^n e^{-m} e^{n-m} = e^n \sum_{m=0}^n e^{-2m} = \frac{e^n \cdot e^2}{e^2 - 1} - \frac{e^{-n}}{e^2 - 1}.$$

Пользуясь теоремой умножения, найти оригиналы для следующих изображений:

$$860. F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)(e^p - e)}.$$

$$861. F^*(p) = \frac{e^{-p}}{(1 - e^{-p})^2} \cdot \frac{e^p}{e^p - 1}.$$

$$862. F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)^2 (e^p - e)}.$$

$$863. F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^p - e^2)(e^p - 1)}.$$

Изображение разностей. Разностью первого порядка решетчатой функции  $f(n)$  называется величина, обозначаемая символом  $\Delta f(n)$  и определяемая равенством

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n). \quad (17)$$

Разностью второго порядка  $\Delta^2 f(n)$  называется величина, равная

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) \quad (18)$$

или, учитывая (17),

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n). \quad (19)$$

Вообще, разность  $l$ -го порядка  $\Delta^l f(n)$  определяется соотношением

$$\Delta^l f(n) = \Delta^{l-1} f(n+1) - \Delta^{l-1} f(n) \quad (20)$$

или

$$\Delta^l f(n) = \sum_{j=0}^l (-1)^j C_l^j f(n+k-j), \quad (21)$$

где  $C_l^j = \frac{l!}{j!(l-j)!}$  — биномиальные коэффициенты.

Пример 11. Найти разности для функции  $f(n) = 2n^2$ .

Решение. По определению первая разность

$$\Delta f(n) = 2(n+1)^2 - 2n^2 = 2(2n+1).$$

Вторая разность

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = 2[2(n+1)+1] - 2(2n+1) = 4.$$

Очевидно, все разности более высокого порядка равны нулю (сравните с производными функции  $f(t) = 2t^2$ ).

В следующих задачах найти разности  $k$ -го порядка:  
 864.  $f(n) = 3n + 2$ . 865.  $f(n) = e^{2n}$ . 866.  $f(n) = n^2 - n$ .

Пусть  $f(n) \doteq F^*(p)$ . Тогда

$$\Delta f(n) \doteq (e^p - 1) F^*(p) - e^p f(0),$$

$$\Delta^2 f(n) \doteq (e^p - 1)^2 F^*(p) - e^p (e^p - 1) f(0) - e^p \Delta f(0)$$

и т. д.

Вообще,

$$\Delta^k f(n) \doteq (e^p - 1)^k F^*(p) - e^p \sum_{\nu=0}^{k-1} (e^p - 1)^{k-\nu-1} \Delta^\nu f(0), \quad (22)$$

где положено  $\Delta^0 f(0) = f(0)$ . Из соотношения (22) находим

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^p - 1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\Delta^\nu f(0)}{(e^p - 1)^\nu} + \frac{1}{(e^p - 1)^k} L_D \{ \Delta^k f(n) \}, \quad (23)$$

где  $L_D \{ \Delta^k f(n) \}$  — изображение  $\Delta^k f(n)$  в смысле дискретного преобразования Лапласа.

Если, в частности,  $\Delta^\nu f(0) = 0$  ( $\nu = 0, 1, \dots, k-1$ ) или, что эквивалентно,  $f(0) = f(1) = \dots = f(k-1) = 0$ , то формула (22) приобретает

особенно простой вид

$$\Delta^k f(n) \doteq (e^p - 1)^k F^*(p),$$

т. е. операции взятия разности  $k$ -го порядка от оригинала отвечает умножение изображения на  $(e^p - 1)^k$ .

Пример 12. Найти изображение функции  $f(n) = n^2$ .

Решение. Имеем

$$\Delta f(n) = 2n + 1,$$

$$\Delta^2 f(n) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2,$$

$$\Delta^k f(n) = 0 \quad (k > 2).$$

Далее  $f(0) = 0$ ,  $\Delta f(0) = 1$ ,  $\Delta^2 f(0) = 2$ . Полагая в равенстве (23)  $k = 3$ , будем иметь

$$\begin{aligned} f(n) \doteq F^*(p) &= \\ &= \frac{e^p}{e^p - 1} \sum_{v=0}^2 \frac{\Delta^v f(0)}{(e^p - 1)^v} = \frac{e^p}{e^p - 1} \left( 0 + \frac{1}{e^p - 1} + \frac{2}{(e^p - 1)^2} \right) = \frac{e^p (e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}. \end{aligned}$$

Найти изображения функций:

867.  $f(n) = n^3$ .

868.  $f(n) = \frac{n(n-1)}{2!}$ .

869.  $f(n) = (n-k)^2 \eta(n-k)$ .

Изображение суммы. Пусть  $f(n)$  — решетчатая функция, имеющая изображение

$$f(n) \doteq F^*(p).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m).$$

Тогда

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m) \doteq \frac{F^*(p)}{e^p - 1},$$

т. е. суммированию оригиналов отвечает деление изображения на  $e^p - 1$ .

Вообще,  $k$ -кратное суммирование оригинала соответствует делению изображения на  $(e^p - 1)^k$ .

Пример 13. Пользуясь теоремой об изображении суммы, найти сумму

$$\sum_{m=0}^{n-1} m e^m.$$

Решение. Изображение  $ne^n$  равно  $\frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2}$ . Поэтому согласно теореме об изображении суммы

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} me^m &\div \frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2 (e^p - 1)} = \\ &= \frac{e}{(e-1)^2} \left[ \frac{e^p}{e^p - 1} - \frac{e^p}{e^p - e} + \frac{e-1}{e} \cdot \frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2} \right] \div \\ &\div \frac{e}{(e-1)^2} \left[ 1 - e^n + \frac{(e-1) ne^n}{e} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{n-1} me^m = \frac{e(1 - e^n) + (e-1) ne^n}{(e-1)^2}.$$

Найти следующие суммы:

$$870. \sum_{m=0}^{n-1} m^2. \quad 871. \sum_{m=0}^{n-1} m \cos m\alpha.$$

$$872. \sum_{m=0}^{n-1} m(m-1). \quad 873. \sum_{m=0}^{n-1} e^m \cos m\alpha \quad (n \geq 2).$$

Формула обращения. Пусть решетчатая функция  $f(n)$  имеет своим изображением функцию  $F^*(p)$  комплексного переменного  $p = \sigma + i\tau$ , где  $F^*(p)$ , в силу своей периодичности:  $F^*(p + 2\pi i) = F^*(p)$ , рассматривается в основной полосе  $-\pi < \text{Im } p \leq \pi$ .

Если известно изображение  $F^*(p)$ , то оригинал  $f(n)$  можно найти по формуле обращения

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(p) e^{np} dp, \quad (24)$$

где  $c$  — любое действительное число, большее, чем абсцисса сходимости  $s^*$ .

В случае, когда  $F^*(p)$  есть правильная рациональная дробь относительно  $e^p$ , имеем

$$f(n) = \sum_{\nu} \text{res}_{p_{\nu}} [F^*(p) e^{(n-1)p}], \quad (25)$$

где сумма берется по всем полюсам функции  $F^*(p)$ , расположенным в полосе  $-\pi < \text{Im } p \leq \pi$  и на ее границе  $\text{Im } p = \pi$ . Если  $p_{\nu}$  — простой полюс, то

$$\text{res}_{p_{\nu}} [F^*(p) \cdot e^{p(n-1)}] = \lim_{p \rightarrow p_{\nu}} [F^*(p) (e^p - e^{p_{\nu}}) e^{p(n-1)}]; \quad (26)$$

если же  $p_\nu$  — полюс порядка  $r_\nu$ , то

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p_\nu} [F^*(p) e^{p(n-1)}] &= \\ &= \frac{1}{(r_\nu - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_\nu} \frac{d^{r_\nu - 1}}{dp^{r_\nu - 1}} [F^*(p) (e^p - e^{p_\nu})^{r_\nu} e^{p(n-1)}]. \end{aligned} \quad (27)$$

**Пример 14.** Используя формулу (25), найти оригинал, соответствующий изображению

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 3e^p + 2}.$$

**Решение.** Находим нули знаменателя. Имеем  $e^{2p} - 3e^p + 2 = 0$ , откуда  $e^p = 1$  и  $e^p = 2$ . Значит,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = \ln 2$  — простые нули знаменателя, а следовательно, они являются простыми полюсами функции  $F^*(p)$  в основной полосе. Находим вычеты функции  $F^*(p) e^{p(n-1)}$  относительно этих полюсов. Имеем

$$\operatorname{res}_{p=0} [F^*(p) e^{p(n-1)}] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{e^p (e^p - 1)}{(e^p - 1)(e^p - 2)} e^{p(n-1)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pn}}{e^p - 2} = -1;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=\ln 2} [F^*(p) e^{p(n-1)}] &= \lim_{p \rightarrow \ln 2} \frac{e^p (e^p - e^{\ln 2}) e^{p(n-1)}}{(e^p - 1)(e^p - 2)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \ln 2} \frac{e^{pn}}{e^p - 1} = \frac{e^{n \ln 2}}{e^{\ln 2} - 1} = \frac{e^{\ln 2^n}}{2 - 1} = 2^n. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле (25) получаем

$$f(n) = -1 + 2^n.$$

**Пример 15.** С помощью формулы обращения найти оригинал для функции

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 1}.$$

**Решение.** Функция

$$F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)(e^p + 1)}$$

имеет два простых полюса в точках  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = i\pi$  основной полосы  $-\pi < \operatorname{Im} p \leq \pi$ . Находим

$$\operatorname{res}_{p=0} [F^*(p) e^{p(n-1)}] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^p (e^p - 1) e^{p(n-1)}}{(e^p - 1)(e^p + 1)} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=i\pi} [F^*(p) e^{p(n-1)}] &= \lim_{p \rightarrow i\pi} \frac{e^p (e^p - e^{i\pi}) e^{p(n-1)}}{(e^p - 1)(e^p + 1)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow i\pi} \frac{e^{pn}}{e^p - 1} = \frac{e^{i\pi n}}{e^{i\pi} - 1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (25)

$$f(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-1)^{n-1}.$$

Найти оригиналы для следующих изображений:

$$874. F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 3)^2}.$$

$$875. F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 7e^p + 10}.$$

$$876. F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} + 1}.$$

$$877. F^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{4p} - 1}.$$

$$878. F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} + 2ae^p + 2a^2} \quad (a > 0).$$

$$879. F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - e)^3}.$$

Решение разностных уравнений с помощью дискретного преобразования Лапласа. Уравнение вида

$$F(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)) = 0 \quad (28)$$

или

$$F(n, f(n), \Delta f(n), \dots, \Delta^k f(n)) = 0, \quad (29)$$

где  $f(n)$  — искомая решетчатая функция, называется *разностным уравнением  $k$ -го порядка*.

Уравнение вида (28) сводится к уравнению вида (29) при помощи формулы

$$f(n+k) = f(n) + C_k^1 \Delta f(n) + C_k^2 \Delta^2 f(n) + \dots + \Delta^k f(n), \quad (30)$$

а при помощи формулы

$$\Delta^k f(n) = f(n+k) - C_k^1 f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) - \dots + (-1)^k f(n) \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (31)$$

где  $C_k^m = \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{m!}$  — биномиальные коэффициенты, уравнение (29) сводится к уравнению (28).

Если уравнение (29) линейно относительно  $f(n)$  и ее разностей, то оно называется *линейным разностным уравнением*. Линейное разностное уравнение порядка  $k$  с постоянными коэффициентами имеет вид

$$b_0 \Delta^k f(n) + b_1 \Delta^{k-1} f(n) + \dots + b_k f(n) = \varphi(n), \quad (32)$$

где  $\varphi(n)$  — заданная решетчатая функция,  $f(n)$  — искомая решетчатая функция,  $b_0, b_1, \dots, b_k$  — постоянные, причем  $b_0 \neq 0, b_k \neq 0$ .

Заменяя в уравнении (32) разности  $\Delta^m f(n)$  ( $m=1, 2, \dots, k$ ) по формуле (31), получим другую форму разностного линейного уравнения:

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = \varphi(n). \quad (33)$$

Если  $\varphi(n) \equiv 0$ , то уравнения (32) и (33) называются *однородными*, если же  $\varphi(n) \not\equiv 0$ , то эти уравнения называются *неоднородными*.

Разностное уравнение, содержащее  $f(n)$  и  $f(n+k)$ , называется разностным уравнением  $k$ -го порядка ( $k > 0$ ). Таким образом, уравнение (33) при  $a_0 \neq 0$  и  $a_k \neq 0$  есть неоднородное линейное разностное уравнение  $k$ -го порядка.



Порядок разностного уравнения может не совпадать с порядком наивысшей разности, входящей в него, если разностное уравнение записано в виде (32).

**Пример 16.** Разностное уравнение

$$\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) = 0$$

после замены в нем разностей по формуле (31) приводится к виду

$$f(n+3) + f(n+2) = 0$$

или

$$f(n+1) + f(n) = 0,$$

т. е. является разностным уравнением первого порядка.

Определить порядки следующих разностных уравнений:

**880.**  $\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) - f(n) = 0.$

**881.**  $\Delta^3 f(n) + 3\Delta^2 f(n) + 3\Delta f(n) + f(n) = n^3 + 1.$

**882.**  $\Delta^3 f(n) + 2\Delta^2 f(n) + \Delta f(n) = 2^n.$

**883.**  $\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) = \sin \frac{n\pi}{6}.$

Начальные условия для разностного уравнения  $k$ -го порядка задаются в виде значений решетчатой функции  $f(n)$  и ее разностей до  $(k-1)$ -го порядка исключительно при  $n=0$ , если уравнение имеет форму (32), или в виде значений решетчатой функции  $f(n)$  при  $n=0, 1, \dots, k-1$ , если уравнение имеет форму (33).

Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами методом дискретного преобразования Лапласа производится по той же схеме, что и в случае классического преобразования Лапласа. Применяя дискретное преобразование Лапласа к таким уравнениям и используя теоремы линейности, опережения или изображения разностей, мы приходим к простому линейному алгебраическому уравнению относительно изображения  $F^*(p)$  искомой функции  $f(n)$  (уже с учетом начальных условий). Разрешая это алгебраическое уравнение относительно  $F^*(p)$ , получим операторное решение разностного уравнения, оригинал для которого будет искомым решением исходного разностного уравнения, удовлетворяющим поставленным начальным условиям.

**Пример 17.** Найти решение уравнения

$$f(n+1) - ef(n) = 1, \quad f(0) = 0. \quad (34)$$

**Решение.** Пусть  $f(n) \doteq F^*(p)$ . По теореме опережения

$$f(n+1) \doteq e^p F^*(p).$$

Применяя к обеим частям (34) дискретное преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$e^p F^*(p) - eF^*(p) = \frac{e^p}{e^p - 1},$$

откуда

$$F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - e)(e^p - 1)}.$$

Функция  $F^*(p)$  имеет два простых полюса  $p=0$ ,  $p=1$ :

$$\operatorname{res}_{p=0} [F^*(p) e^{(n-1)p}] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^p}{e^p - e} e^{(n-1)p} = \frac{1}{1-e},$$

$$\operatorname{res}_{p=1} [F^*(p) e^{(n-1)p}] = \frac{e}{e-1} e^{n-1} = \frac{e^n}{e-1}.$$

Следовательно, по формуле (25)

$$f(n) = \frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Решить следующие линейные однородные разностные уравнения:

884.  $f(n+1) - 2f(n) = 0$ ,  $f(0) = 1$ .

885.  $f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 0$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 0$ .

886.  $f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

887.  $f(n+3) - 3f(n+2) + 4f(n+1) - 2f(n) = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  
 $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 1$ .

888.  $f(n+4) + f(n) = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  
 $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 0$ ,  $f(3) = 0$ .

889.  $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = 0$ ,  
 $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 1$ .

Решить следующие линейные неоднородные разностные уравнения:

890.  $f(n+1) + 2f(n) = n$ ,  $f(0) = 0$ .

891.  $f(n+2) - 4f(n) = 4^n$ ,  $f(0) = f(1) = 1$ .

892.  $f(n+2) + f(n) = 1 - (-1)^n$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

893.  $f(n+2) - 6f(n+1) + 9f(n) = n \cdot 3^n$ ,  
 $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$ .

894.  $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = \cos n\pi$ ,  
 $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 0$ .

895.  $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = n^2$ ,  
 $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 0$ .

**§ 22. Понятие об устойчивости решения системы дифференциальных уравнений. Простейшие типы точек покоя**

Пусть имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где  $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) существуют и непрерывны, и пусть  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) есть решение этой системы, удовлетворяющее при  $t = t_0$  условиям

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Решение  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову* при  $t \rightarrow +\infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всякого решения  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) той же системы (1), начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

для всех  $t \geq t_0$  справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

т. е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех  $t \geq t_0$ .

Иными словами, решение  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) устойчиво, если достаточно близкое к нему в начальный момент  $t = t_0$  решение  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) для всех  $t \geq t_0$  содержится в сколь угодно узкой  $\varepsilon$ -трубке, построенной вокруг решения  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Если при сколь угодно малом  $\delta > 0$  хотя бы для одного решения  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) неравенства (2) не выполняются, то решение  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) называется *неустойчивым*.

Если решение  $\varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) не только устойчиво, но, кроме того, удовлетворяет условиям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

если  $|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta_1$ , то решение  $\varphi_i(t)$  называется *асимптотически устойчивым*.

Вопрос об устойчивости решения  $\varphi_i(t)$  системы (1) может быть сведен к вопросу об устойчивости нулевого решения  $x_i(t) \equiv 0$  неко-

торой новой системы уравнений, получающейся из (1) линейной заменой искомым функций

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

где  $x_i(t)$  — новые неизвестные функции, равные отклонениям прежних неизвестных функций  $y_i(t)$  от функций  $\varphi_i(t)$ , определяющих исследуемое решение. Поэтому в дальнейшем будем считать, что на устойчивость исследуется именно нулевое решение  $x_i(t) \equiv 0$  или, что то же, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Вместо термина «нулевое решение» будем употреблять термин *тривиальное решение*.

В применении к точке покоя  $x_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) условие устойчивости выглядит так:

*Точка покоя  $x_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (5) устойчива по Ляпунову, если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства  $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) следует  $|x_i(t)| < \varepsilon$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) при всех  $t \geq t_0$ .*

Пример 1. Каждое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (6)$$

устойчиво.

Действительно, решение  $x_1(t)$  этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $x_1(t_0) = x_1^0$ , есть  $x_1(t) \equiv x_1^0 = \text{const}$ .

Рассмотрим другое решение  $x_2(t)$  уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию

$$x_2(t_0) = x_2^0. \quad (7)$$

Для этих решений имеем  $|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0|$  для всех  $t$ . Следовательно, для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , например,  $\delta = \varepsilon$  такое, что как только  $|x_2^0 - x_1^0| < \delta$ , то для решений  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  будет выполняться неравенство

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| < \varepsilon \quad \text{при всех } t \geq t_0.$$

Следовательно, любое решение уравнения (6) устойчиво. Однако асимптотической устойчивости нет:

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| \not\rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Пример 2. Каждое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (8)$$

асимптотически устойчиво.

В самом деле, общее решение уравнения имеет вид

$$x(t) = Ce^{-t}. \quad (9)$$

Решения  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  уравнения (8), удовлетворяющие начальным условиям  $x_1(t_0) = x_1^0$ ,  $x_2(t_0) = x_2^0$ , суть

$$x_1(t) = x_1^0 e^{-(t-t_0)}, \quad x_2(t) = x_2^0 e^{-(t-t_0)},$$

Отсюда

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| e^{-(t-t_0)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

что означает асимптотическую устойчивость любого решения уравнения (8).

**Пример 3.** Решение  $x(t) \equiv -1$  уравнения  $\frac{dx}{dt} = 1 - x^2(t)$  неустойчиво, так как при  $t \rightarrow +\infty$  все решения уравнения

$$x(t) = \frac{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} - (1-x_0)}{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} + (1-x_0)}$$

стремятся к  $+1$ . Решение  $x(t) \equiv 1$  этого уравнения согласно определению асимптотически устойчиво.

Пользуясь определением, исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем:

$$996. \quad \frac{dx}{dt} + x = 1, \quad x(0) = 1.$$

$$997. \quad \frac{dx}{dt} = -t(x-1), \quad x(0) = 1.$$

$$998. \quad \frac{dx}{dt} - 2x = t, \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$999. \quad \frac{dx}{dt} = 2xt, \quad x(0) = 0.$$

$$1000. \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad x(0) = 1.$$

$$901. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -3y - 2x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

$$902. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y + 3x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

**Простейшие типы точек покоя.** Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (A)$$

Точка  $(x_0, y_0)$  называется *точкой покоя* или *особой точкой системы (A)*, если  $P(x_0, y_0) = 0$ ,  $Q(x_0, y_0) = 0$ .

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — постоянные. Точка  $(0, 0)$  является точкой покоя системы (1). Исследуем расположение траекторий системы (1) в окрестности этой точки. Ищем решение в виде

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \quad y = \alpha_2 e^{kt}. \quad (2)$$

Для определения  $k$  получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим возможные случаи.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны. Подслучаи: 1)  $k_1 < 0, k_2 < 0$ . Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел). 2)  $k_1 > 0, k_2 > 0$ . Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел). 3)  $k_1 > 0, k_2 < 0$ . Точка покоя неустойчива (седло). 4)  $k_1 = 0, k_2 > 0$ . Точка покоя неустойчива. 5)  $k_1 = 0, k_2 < 0$ . Точка покоя устойчива, но не асимптотически.

II. Корни характеристического уравнения комплексные:  $k_1 = p + qi, k_2 = p - qi$ . Подслучаи: 1)  $p < 0, q \neq 0$ . Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый фокус). 2)  $p > 0, q \neq 0$ . Точка покоя неустойчива (неустойчивый фокус). 3)  $p = 0, q \neq 0$ . Точка покоя устойчива (центр). Асимптотической устойчивости нет.

III. Корни кратные:  $k_1 = k_2$ . Подслучаи: 1)  $k_1 = k_2 < 0$ . Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел). 2)  $k_1 = k_2 > 0$ . Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел). 3)  $k_1 = k_2 = 0$ . Точка покоя неустойчива. Возможен исключительный случай, когда все точки плоскости являются устойчивыми точками покоя.

Для системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

характеристическим уравнением будет

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

1) Если действительные части всех корней характеристического уравнения (5) системы (4) отрицательны, то точка покоя  $x_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) асимптотически устойчива.

2) Если действительная часть хотя бы одного корня характеристического уравнения (5) положительна,  $\operatorname{Re} k_i = p_i > 0$ , то точка покоя  $x_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4) неустойчива.

3) Если характеристическое уравнение (5) имеет простые корни с нулевой действительной частью (т. е. нулевые или чисто мнимые корни), то точка покоя  $x_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (4) устойчива, но не асимптотически.

Пример 4. Установить характер точки покоя  $(0, 0)$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Решение. В данном случае

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $k_{1,2} = \pm i$  — чисто мнимые. Точка покоя устойчива (центр).

Установить характер точки покоя  $(0, 0)$  в следующих системах:

$$\begin{array}{ll} 903. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases} & 904. \begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases} \\ 905. \begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases} & 906. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases} \\ 907. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases} & 908. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases} \\ 909. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases} & 910. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases} \\ 911. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases} & \end{array}$$

Для системы двух линейных уравнений с постоянными действительными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1)$$

характеристическое уравнение (3) приводится к виду

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

1) Если  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

2) Если  $a_1 > 0$ ,  $a_2 = 0$ , или  $a_1 = 0$ ,  $a_2 > 0$ , то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

3) Во всех остальных случаях нулевое решение неустойчиво; однако при  $a_1 = a_2 = 0$  возможен исключительный случай, когда нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

**Пример 5.** Определить значения параметра  $\alpha$ , при котором устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x - \alpha y. \end{cases}$$

**Решение.** Характеристическое уравнение для данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ \alpha - 1 & -\alpha - k \end{vmatrix} = 0$$

или  $k^2 + \alpha k + 1 - \alpha = 0$ . Здесь  $a_1 = \alpha$ ,  $a_2 = 1 - \alpha$ .

Асимптотическая устойчивость нулевого решения будет иметь место при  $\alpha > 0$ ,  $1 - \alpha > 0$ , т. е. при  $0 < \alpha < 1$ .

Устойчивость, но не асимптотическая, будет в двух случаях:

а)  $\alpha > 0$ ,  $1 - \alpha = 0$ , т. е. при  $\alpha = 1$ ;

б)  $\alpha = 0$ ,  $1 - \alpha > 0$ , т. е. при  $\alpha = 0$ .

При всех других значениях  $\alpha$  нулевое решение неустойчиво.

Определить значения параметра  $\alpha$ , при которых нулевые решения следующих систем устойчивы:

$$912. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$$

$$913. \begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$$

$$914. \begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 4y. \end{cases}$$

$$915. \begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

$$916. \begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = \alpha y - z, \\ \dot{z} = \alpha z - x. \end{cases}$$

**Пример 6.** В плоскости параметров  $\alpha$  и  $\beta$  найти области, в которых устойчиво нулевое решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1)y, \\ \dot{y} = x - \beta y. \end{cases}$$

**Решение.** Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & \beta - 2\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\beta - k \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^2 + (\beta - \alpha)k + 1 + \alpha\beta - \beta = 0.$$

Здесь

$$a_1 = \beta - \alpha, \quad a_2 = 1 + \alpha\beta - \beta;$$



$a_1$  и  $a_2$  являются непрерывными функциями от  $\alpha$  и  $\beta$ , поэтому знаки  $a_1$  и  $a_2$  будут меняться там, где  $a_1 = a_2 = 0$ , т. е. на прямой  $\beta - \alpha = 0$  и на гиперболе  $1 + \alpha\beta - \beta = 0$ . Эти линии разбивают плоскость параметров  $\alpha, \beta$  на четыре области I, II, III, IV (рис. 37),

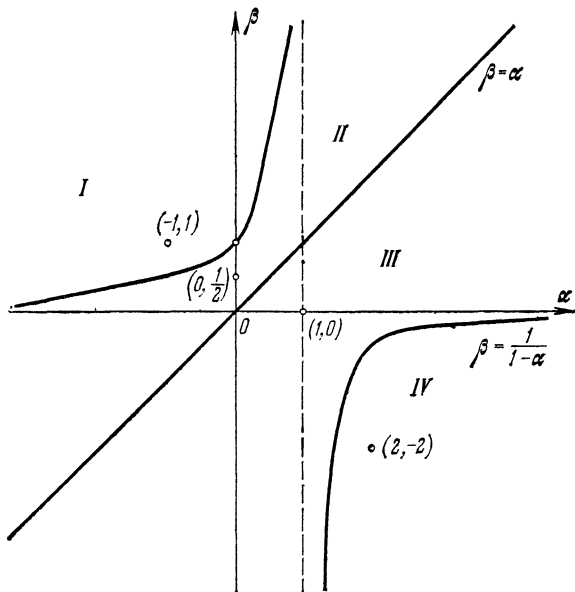


Рис. 37.

в каждой из которых знаки  $a_1$  и  $a_2$  постоянны. Возьмем по одной произвольной точке в каждой области и определим в этих точках знаки коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ .

Область I: в точке  $(-1; 1)$  имеем  $a_1 = 2 > 0$ ,  $a_2 = -1 < 0$ . Нулевое решение системы в этой области неустойчиво.

Область II: в точке  $(0, \frac{1}{2})$  имеем  $a_1 = \frac{1}{2} > 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{2} > 0$ . Нулевое решение системы в области II асимптотически устойчиво.

Область III: в точке  $(1, 0)$  имеем  $a_1 = -1 < 0$ ,  $a_2 = 1 > 0$ . Нулевое решение в области III неустойчиво.

Область IV: в точке  $(2, -2)$  имеем  $a_1 = -4 < 0$ ,  $a_2 = -1 < 0$ . Нулевое решение в этой области неустойчиво.

Исследуем на устойчивость нулевое решение на границах рассмотренных выше областей.

1)  $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$ ,  $\alpha < 1$  (граница между областями I и II). На этой границе  $a_1 > 0$ ,  $a_2 = 0$ , так что нулевое решение на ней устойчиво, но не асимптотически,

2)  $\beta = \alpha$  (граница между областями II и III). На этой границе  $a_1 = 0$ ,  $a_2 > 0$ , так что нулевое решение на ней устойчиво, но не асимптотически.

3)  $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$ ,  $\alpha > 1$  (граница между областями III и IV). На этой границе  $a_1 < 0$ ,  $a_2 = 0$ , так что нулевое решение на ней неустойчиво.

Итак, нулевое решение асимптотически устойчиво в области II и устойчиво, но не асимптотически, на границе области II.

Для следующих систем в плоскости параметров  $\alpha$  и  $\beta$  найти области, в которых нулевое решение устойчиво:

$$917. \begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y. \end{cases} \quad 918. \begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = x + \alpha y. \end{cases}$$

$$919. \begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + (\alpha - 2)y. \end{cases}$$

$$920. \begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - \beta^2 y, \\ \dot{y} = (\alpha^2 - 1)x + (\beta^2 + 1)y. \end{cases}$$

$$921. \begin{cases} \dot{x} = (\alpha^2 - \beta)x + (1 + \beta)y, \\ \dot{y} = -\beta^2 x + \beta^2 y. \end{cases}$$

$$922. \begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - (\beta + 1)y, \\ \dot{y} = (4\alpha + \beta + 1)x - 4y. \end{cases}$$

## § 23. Второй метод Ляпунова

Функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *определенно положительной* в  $H$ -окрестности  $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq H\right)$  начала координат, если она положительна во всех точках этой окрестности, за исключением начала координат, где она равна нулю:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \text{ если } \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0, \\ v(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Например, функция  $v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  будет определено положительной функцией в пространстве переменных  $x_1, x_2, x_3$ . Функция  $u = x_1^2 + x_2^2$  будет лишь знакопостоянной в этом пространстве, но не определено положительной, так как она обращается в нуль на всей оси  $Ox_3$ , а не только в точке  $(0, 0, 0)$ , и она же будет определено положительной в пространстве  $x_1, x_2$ .

Если  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$  при  $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$  и  $v(0, 0, \dots, 0) = 0$ , то функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *определенно отрицательной*.

Функция  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *определенно положительной* в  $H$ -окрестности начала координат при  $t \geq t_0$ , если существует такая не зависящая от  $t$  определенно положительная функция  $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , что  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при всех указанных значениях аргументов и  $v(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$ .

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

и пусть

$$v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

есть непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Полная производная по  $t$  функции  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , вычисленная в силу системы (1) (вдоль интегральных кривых), равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

Если правые части системы (1) не содержат явно  $t$ , то такая система называется автономной или стационарной.

I. Теорема А. М. Ляпунова об устойчивости. Если система дифференциальных уравнений (1) такова, что существует функция  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенно положительная при  $t \geq t_0$  в некоторой  $H$ -окрестности начала координат, производная которой  $\frac{dv}{dt}$ , вычисленная в силу системы (1), неположительна, то тривиальное решение системы (1) устойчиво.

II. Теорема А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости (случай автономных систем). Если автономная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

такова, что существует функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенно положительная в некоторой  $H$ -окрестности начала координат, производная которой  $\frac{dv}{dt}$ , вычисленная в силу системы (3), определенно отрицательна, то тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) асимптотически устойчиво.

Функции  $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , фигурирующие в приведенных выше теоремах, называются *функциями Ляпунова*.

Назовем областью  $v > 0$  какую-нибудь область окрестности

$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq H$  начала координат пространства переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

ограниченную поверхностью  $v=0$ , в которой функция  $v$  принимает положительные значения.

Допустим, что функция  $v$  обладает следующими свойствами:

1) при сколь угодно больших значениях  $t$  в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область  $v > 0$ ;

2) в области  $v > 0$  функция  $v$  ограничена;

3) в области  $v > 0$  производная  $\frac{dv}{dt}$ , составленная в силу системы уравнений (2), определено положительная.

III. Теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости. Если для системы дифференциальных уравнений (2) можно найти функцию, удовлетворяющую условиям 1), 2), 3), то тривиальное решение этой системы неустойчиво.

Замечание. Если в системе (2) все  $f_i$  не зависят явно от  $t$ , то функцию Ляпунова нужно искать как не зависящую явно от  $t$ .

Пример 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(x-2y)(1-x^2-3y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -(y+x)(1-x^2-3y^2). \end{cases}$$

Решение. Возьмем в качестве  $v$  функцию  $v = x^2 + 2y^2$ . Она является, во-первых, определено положительной, а, во-вторых, ее производная  $\frac{dv}{dt}$ , взятая в силу системы, равна

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= 2x(2y-x)(1-x^2-3y^2) - 4y(x+y)(1-x^2-3y^2) = \\ &= -2(1-x^2-3y^2)(x^2+2y^2) \leq 0 \end{aligned}$$

при достаточно малых  $x$  и  $y$ .

Мы видим, что выполняются все условия теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости.

Следовательно, тривиальное решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  устойчиво.

Пример 2. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Решение. Функция  $v = x^2 + y^2$  удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости:

$$1) \quad v(x, y) \geq 0, \quad v(0, 0) = 0;$$

$$2) \quad \frac{dv}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -(4x^4 + 6y^4) \leq 0,$$

т. е.  $\frac{dv}{dt} < 0$  и  $\frac{dv}{dt} = 0$  только при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , и значит, есть определено отрицательная функция. Следовательно, решение  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  асимптотически устойчиво.

**Пример 3.** Исследовать на устойчивость тривиальное решение автономной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$$

**Решение.** Возьмем в качестве  $v(x, y)$  функцию

$$v = \frac{1}{3} x^3 + xy + \frac{1}{3} y^3.$$

Здесь область  $v > 0$  является, например, область  $x > 0, y > 0$ . В области  $v > 0$  имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

Согласно теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости решение  $x \equiv 0, y \equiv 0$  неустойчиво.

Покажем на примере один метод построения функции Ляпунова, называемый методом деления переменных.

**Пример 4.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3. \end{cases} \quad (4)$$

Найти для системы (4) функцию Ляпунова в виде

$$v(x, y) = F_1(x) + F_2(y),$$

где  $F_1(x), F_2(y)$  — некоторые пока неизвестные дифференцируемые функции.

**Решение.** В силу системы (4) будем иметь

$$\dot{v} = F'_1(x) \dot{x} + F'_2(y) \dot{y} = F'_1(x) (ax^3 + by) - F'_2(y) (cx - dy^3).$$

Потребуем, чтобы функция  $\dot{v}$  имела такой же вид, что и функция  $v(x, y)$ , т. е. чтобы и она представлялась в виде суммы двух функций — одной, зависящей только от  $x$ , другой — только от  $y$ . Для этого необходимо, чтобы имело место тождество

$$F'_1(x) by - F'_2(y) cx \equiv 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{cx}{F'_1(x)} = \frac{by}{F'_2(y)},$$

и, следовательно, каждая из дробей должна быть постоянной величиной, например, равной  $\frac{1}{2}$ . Тогда будем иметь

$$\frac{cx}{F'_1(x)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{by}{F'_2(y)} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$F_1(x) = cx^2, \quad F_2(y) = by^2,$$

так что

$$v(x, y) = cx^2 + by^2.$$

Исследовать на устойчивость тривиальное решение систем:

$$\begin{array}{ll}
 923. \begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3. \end{cases} & 924. \begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3. \end{cases} \\
 925. \begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = \frac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3. \end{cases} & 926. \begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases} \\
 927. \begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases} & \\
 928. \begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y - x^2y - x^4y^3. \end{cases} & \\
 929. \begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3. \end{cases} & 930. \begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2y^3. \end{cases} \\
 931. \begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases} & 932. \begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases} \\
 933. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy^2, \\ \dot{y} = -\frac{3}{4}y + 3xz^3, \\ \dot{z} = -\frac{2}{3}z - 2xyz^2 \end{cases} & 934. \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}y - x - \frac{7}{2}x^3, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}y^3. \end{cases} \\
 & (v = x^2 + 2y^2 + 3z^2).
 \end{array}$$

## § 24. Исследование на устойчивость по первому приближению

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где  $f_i$  — дифференцируемые в окрестности начала координат функции,  $f_i(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$ .

Исследуем на устойчивость точку покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (1). Представим систему (1) в окрестности начала координат в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где  $R_i$  имеют порядок выше первого относительно  $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  (т. е. фактически разложим правые части (1) по формуле Тейлора по степеням  $x$  в окрестности начала координат). Вместо точки покоя системы (1) исследуем на устойчивость точку покоя линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

называемой *системой уравнений первого приближения* или *линеаризованной системой для системы (1)*.

Возникает вопрос, влечет ли устойчивость (неустойчивость) точки покоя системы (3) устойчивость (неустойчивость) точки покоя исходной системы (1). Вообще говоря, строгой связи между системами (1) и (3) нет.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2. \quad (4)$$

Здесь  $f(t, x) \equiv x^2$ . Линеаризованное уравнение для уравнения (4) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 0. \quad (5)$$

Решение  $x(t) \equiv 0$  уравнения (5) является устойчивым (см. стр. 219). Оно же, будучи решением исходного уравнения (4), не является для него устойчивым. В самом деле, каждое действительное решение уравнения (4) имеет вид

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad x|_{t=0} = x_0,$$

и перестает существовать при  $t = \frac{1}{x_0}$  (решение непродолжаемо).

**Пример 2.** Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 e^t. \quad (6)$$

Линеаризованное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = x. \quad (7)$$

Решение  $x(t) \equiv 0$  уравнения (7) неустойчиво, так как каждое решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = Ce^t,$$

и очевидно, что  $|x(t)| \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . С другой стороны, решение  $x(t) \equiv 0$  уравнения (6) является асимптотически устойчивым.

В самом деле, общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = Ce^t \left[ 1 + \frac{2}{3} C^2 (e^{3t} - 1) \right]^{-1/2}$$

и, очевидно, стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

Однако при определенных условиях устойчивость (неустойчивость) решения системы первого приближения влечет устойчивость (неустойчивость) решения исходной системы (1).

Ограничимся для простоты случаем, когда коэффициенты  $a_{ij}(t)$  в (3) постоянные. В этом случае говорят, что система (2) стационарна в первом приближении.

**Теорема 1.** Если система уравнений (2) стационарна в первом приближении, все члены  $R_i$  ограничены по  $t$  и разлагаются в ряды по степеням  $x_1, \dots, x_n$  в некоторой области  $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq H$ , причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка, а все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) системы (2) асимптотически устойчиво, т. е. в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

**Теорема 2.** Если система уравнений (2) стационарна в первом приближении, все функции  $R_i$  удовлетворяют условиям теоремы 1 и хотя бы один из корней характеристического уравнения (8) имеет положительную действительную часть, то точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) системы (2) неустойчива, т. е. и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

**Замечание.** Если действительные части всех корней характеристического уравнения (8) неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, то исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно (в этом случае начинают влиять нелинейные члены  $R_i$ ).

**Пример 3.** Исследовать на устойчивость точку покоя  $x=0, y=0$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6, \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4. \end{cases} \quad (9)$$

**Решение.** Нелинейные члены удовлетворяют условиям теорем 1 и 2. Исследуем на устойчивость точку покоя системы первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases} \quad (10)$$



Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

имеет отрицательные корни  $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$ . Следовательно, на основании теоремы 1 точка покоя  $x=0$ ,  $y=0$  систем (9) и (10) асимптотически устойчива.

Пример 4. Рассмотрим уравнение колебания маятника

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b \sin x = 0. \quad (11)$$

Здесь  $x$  — угол отклонения маятника от вертикали. Уравнению (11) соответствует система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b \sin x. \end{cases} \quad (12)$$

Точки покоя системы (12)

$$x = k\pi \quad (k - \text{целое}), \quad y = 0. \quad (13)$$

Исследуем на устойчивость точку покоя  $x=0$ ,  $y=0$ , получающуюся из (13) при  $k=0$ . Используя разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

запишем систему первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay, \end{cases} \quad (14)$$

характеристическое уравнение которой

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (15)$$

Если  $a > 0$ ,  $b > 0$ , то корни уравнения (15) имеют отрицательные вещественные части, и, следовательно, точка покоя  $x=0$ ,  $y=0$  устойчива по первому приближению.

Исследуем теперь на устойчивость точку  $(\pi, 0)$ , что соответствует  $k=1$ . Используя разложение

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \dots$$

и перенося начало координат в точку  $x = \pi$ ,  $y = 0$ , приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = bx - ay, \end{cases} \quad (16)$$

характеристическое уравнение которой

$$\lambda^2 + a\lambda - b = 0. \quad (17)$$

При  $a > 0$ ,  $b > 0$  корни этого уравнения будут действительными и разных знаков. Следовательно, точка покоя  $(\pi, 0)$  является неустойчивой точкой для системы (16).

Пример 5. Исследовать на устойчивость точку покоя  $x=0$ ,  $y=0$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xf(x, y), \\ \dot{y} = -x - yf(x, y), \end{cases} \quad (18)$$

где функция  $f(x, y)$  разлагается в сходящийся степенной ряд и  $f(0, 0) = 0$ .

Решение. Линеаризованная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (19)$$

Точка покоя системы (19) есть  $(0, 0)$ .

Характеристическое уравнение системы (19)

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 + 1 = 0 \quad (20)$$

имеет чисто мнимые корни  $k_{1,2} = \pm i$ . Точка покоя  $(0, 0)$  системы первого приближения (19) устойчива (центр). Так как действительные части корней характеристического уравнения (20) равны нулю, то согласно замечанию на стр. 231 вопрос об устойчивости точки покоя  $(0, 0)$  требует дополнительного исследования. Для исследования на устойчивость точки покоя  $(0, 0)$  системы (18) применим второй метод Ляпунова. Беря  $v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , находим

$$\frac{dv}{dt} = -(x^2 + y^2) f(x, y).$$

Отсюда: если  $f(x, y) \geq 0$  в достаточно малой окрестности начала координат, то точка покоя  $(0, 0)$  устойчива; если  $f(x, y)$  — положительно определенная функция в некоторой окрестности начала координат, то точка покоя  $(0, 0)$  асимптотически устойчива; если  $f(x, y) < 0$  в достаточно малой окрестности начала координат, то точка покоя  $(0, 0)$  неустойчива. Этот пример иллюстрирует тот факт, что в некоторых случаях нельзя судить об устойчивости точки покоя по первому приближению.

Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя  $x=0, y=0$  в следующих системах:

$$935. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$$

$$936. \begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3. \end{cases}$$

$$937. \begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6 \cos y - 6 - y^2. \end{cases}$$

$$938. \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$$

$$939. \begin{cases} \dot{x} = x - 2 \sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$$

$$940. \begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$$

$$941. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 8 \sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

$$942. \begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{7}{2} \sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases} \quad 943. \begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$$

$$944. \begin{cases} \dot{x} = 10 \sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14 \sin y + y^2. \end{cases} \quad 945. \begin{cases} \dot{x} = y - xy^2, \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases}$$

946. Исследовать на устойчивость точки покоя маятника, к которому приложен вращающий момент  $L$ :

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b \sin x = L, \quad \text{где } |L| < b.$$

## § 25. Асимптотическая устойчивость в целом. Устойчивость по Лагранжу

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad f_i(t, 0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

и пусть эта система определена в полупространстве

$$\Omega : \left\{ a < t < +\infty, \sum_{i=1}^n x_i^2 < +\infty \right\}.$$

Говорят, что тривиальное решение  $x_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (1) *асимптотически устойчиво в целом*, если оно

- 1) асимптотически устойчиво по Ляпунову;
- 2) всякое другое решение  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системы (1) обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично определяется асимптотическая устойчивость в целом нетривиального решения системы (1).

Ограничимся автономными системами, т. е. такими, правые части которых не зависят явно от времени  $t$ :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad f_i(0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Функцию Ляпунова  $v(x_1, \dots, x_n)$  назовем *бесконечно большой*, если для любого положительного числа  $M$  существует положительное число  $R$  такое, что вне сферы  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2$  имеет место неравенство  $v > M$ .

**Теорема** (об асимптотической устойчивости в целом). *Если существует бесконечно большая определенно положительная функция  $v(x_1, \dots, x_n)$  такая, что  $\frac{dv}{dt} < 0$  вне  $E$  и  $\frac{dv}{dt} \geq 0$  на  $E$ , где множество  $E$  не содержит целых траекторий (кроме нулевого положения равновесия), то тривиальное решение системы (2) будет асимптотически устойчиво в целом.*

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x^2 \dot{x} + x^3 = 0. \quad (3)$$

Запишем уравнение (3) в виде эквивалентной ему системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 - x^2 y. \end{cases}$$

В качестве функции Ляпунова  $v(x, y)$  возьмем функцию

$$v(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} x^4.$$

Имеем

$$\frac{dv}{dt} = y\dot{y} + x^3 \dot{x} = -x^3 y - x^2 y^2 + x^3 y = -x^2 y^2.$$

Очевидно, что  $v(x, y) \rightarrow \infty$  при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ . Далее,  $\dot{v}(x, y)$  обращается в нуль только на осях координат (множество  $E$ ). Очевидно, что ни одно решение, за исключением точки покоя в начале координат, не остается на этих осях при всех  $t \geq 0$ . В самом деле, во всех точках оси  $OY$ , отличных от начала координат  $O$ , угловой коэффициент

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 - x^2 y}{y}$$

имеет конечное значение, а потому на этой оси не может лежать дуга траектории. С другой стороны, при подходе к оси  $OX$  угловой коэффициент  $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$  и потому на оси  $OX$  не могут находиться дуги траекторий. Следовательно, множество  $E$  не содержит целых траекторий (кроме начала координат).

В силу теоремы точка покоя  $(0, 0)$  обладает асимптотической устойчивостью в целом.

**947.** Показать, что если тривиальное решение линейной автономной системы асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, то оно асимптотически устойчиво в целом.

Исследовать на асимптотическую устойчивость в целом нулевые решения уравнений (см. [2]):

**948.**  $\ddot{x} + \dot{x}^3 + (\dot{x}^2 + 1)x = 0.$

**949.**  $\ddot{x} + \dot{x} + (\dot{x}^2 + \dot{x} + 2)(2x + x^5) = 0.$

**950.**  $\ddot{x} + x^2 e^{-x} \dot{x} + x^3 + 2x = 0.$

Может оказаться, что система (2) не обладает полной устойчивостью, но тем не менее для нее может существовать область асимптотической устойчивости.

Под областью асимптотической устойчивости системы (2) понимается область, содержащая начало координат  $O$  и обладающая тем свойством, что все траектории, начинающиеся в этой области, стремятся при  $t \rightarrow \infty$  к началу координат.

В линейных системах всегда бывает только полная устойчивость, тогда как в нелинейных системах она может не быть таковой.

**Теорема.** Пусть  $v(x_1, \dots, x_n)$  — функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка для всех  $x_i$ . Обозначим через  $\Omega_l$  множество всех точек, где  $v(x_1, \dots, x_n) < l$ . Если множество  $\Omega_l$  ограничено и в нем

- 1)  $v(x_1, \dots, x_n) > 0$  при  $x_i \neq 0$ ,
  - 2)  $\dot{v}(x_1, \dots, x_n) < 0$  при  $x_i \neq 0$
- ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

то начало координат — асимптотически устойчивое положение равновесия системы (2), а  $\Omega_l$  — область асимптотической устойчивости.

**Пример 2.** Указать область асимптотической устойчивости уравнения

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\varepsilon < 0)$$

(уравнение Ван-дер-Поля).

**Решение.** Перепишем уравнение в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Единственная точка покоя — начало координат. Возьмем  $v(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ . Тогда  $\dot{v}(x, y) = y\dot{y} + x\dot{x} = -\varepsilon x^2\left(\frac{x^2}{3} - 1\right)$ . Очевидно,  $\dot{v} \leq 0$  при  $x^2 \leq 3$  ( $\varepsilon < 0$ ). Таким образом, в круге  $x^2 + y^2 < 3$  имеем:  $v > 0$  при  $x^2 + y^2 \neq 0$  и  $\dot{v} < 0$  при  $x^2 + y^2 \neq 0$ , т. е. этот круг содержится в области асимптотической устойчивости.

**Устойчивость по Лагранжу.** Пусть имеем систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения системы (5) для всех  $t \in [t_0, +\infty)$  и любых  $x_1, \dots, x_n$ .

**Определение.** Система (5) называется *устойчивой по Лагранжу*, если все решения этой системы определены и ограничены на  $[t_0, +\infty)$ .

**951.** Показать, что все решения уравнения

$$\ddot{x}(t) + \left(a^2 + \frac{1}{1+t^2}\right)x(t) = 0$$

ограничены на  $[1, +\infty)$ .

**952.** Показать, что все решения уравнения

$$\ddot{x}(t) + \left(1 + e^{-t^2} - \frac{1}{t+2}\right)x(t) = 0$$

ограничены на  $[1, +\infty)$ .

953. На примере уравнений

$$а) \quad \ddot{x}(t) - \frac{2}{t} \dot{x}(t) + x(t) = 0;$$

$$б) \quad \ddot{x}(t) + \frac{2}{t} \dot{x}(t) + x(t) = 0$$

показать, что из ограниченности всех решений «предельного» уравнения  $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$  не следует ограниченности решений исходного уравнения.

## § 26. Критерий Рауса — Гурвица

Большое практическое значение имеют необходимые и достаточные условия того, чтобы все корни алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (1)$$

имели отрицательные вещественные части. Не нарушая общности, можно предположить, что  $a_0 > 0$ .

Положительность всех коэффициентов — необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы все корни уравнения (1) были расположены слева от мнимой оси (в случае уравнений 1-й и 2-й степени это условие и достаточное). Необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (1) дали Раус и независимо от него Гурвиц.

Условия Рауса — Гурвица. Для того чтобы все корни уравнения (1) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Многочлен  $f(\lambda)$  степени  $n \geq 1$  называют *устойчивым многочленом*, если все его корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  имеют отрицательные действительные части:  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), т. е. все корни устойчивого многочлена расположены в левой полуплоскости.

Матрица Гурвица составляется так. По главной диагонали располагаются коэффициенты многочлена (1), начиная с  $a_1$  до  $a_n$ . Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, причем в число последних включается коэффициент  $a_0$ . Все недостающие элементы, т. е. коэффициенты с индексами, большими  $n$  или меньшими 0, заменяются нулями,

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Таким образом, условие Гурвица выглядит так:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (4)$$

Заметим, что так как  $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$ , то последнее из условий  $\Delta_n > 0$  может быть заменено требованием  $a_n > 0$ .

Пример 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Здесь  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 7$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = 10$ ,  $a_5 = 3$ .

Выписываем диагональные миноры Гурвица

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10 \Delta_3 - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_1 = 1 > 0.$$

Итак,  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ ,  $\Delta_4 > 0$ ,  $\Delta_5 > 0$ . Следовательно, тривиальное решение  $y \equiv 0$  уравнения асимптотически устойчиво.

Вычисления можно вести так. Сначала составляем минор  $\Delta_n$ . Затем последовательно вычисляем миноры  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  и т. д. Если встретился отрицательный минор, то система неустойчива и дальнейшие вычисления излишни.

Если коэффициенты уравнения (1) заданы как числа, то условия (4) легко проверяются. Если же коэффициенты уравнения (2) содержат

буквенные параметры, то вычисление определителей при больших  $k$  затруднительно.

Можно показать, что если условия (4) выполнены, то все коэффициенты многочлена (1) положительны

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0. \quad (5)$$

Как уже отмечалось, условия (5) являются необходимыми, но не достаточными для того, чтобы все корни  $f(\lambda)$  располагались в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ . Однако при выполнении условий (5) неравенства (4) уже не являются независимыми. Так, например, при  $n=5$  условия Рауса—Гурвица приводятся к двум неравенствам:  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_4 > 0$ . Это позволило Лъенару и Шипару установить другие условия устойчивости, в которых число детерминантных неравенств примерно вдвое меньше, чем в условиях (4).

Условия Лъенара—Шипара. Для того чтобы многочлен

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (1')$$

имел все корни с отрицательными действительными частями, необходимо и достаточно, чтобы:

1) все коэффициенты многочлена  $f(\lambda)$  были положительны:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0;$$

2) имели место детерминантные неравенства

$$\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \dots \quad (6)$$

(здесь, как и раньше,  $\Delta_k$  — определитель Гурвица  $k$ -порядка).

Пример 2. Рассмотрим то же уравнение, что и на стр. 238:

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Здесь

$$a_0 = a_1 = 1 > 0, a_2 = 7 > 0, a_3 = 4 > 0, a_4 = 10 > 0, a_5 = 3 > 0,$$

т. е. первое условие критерия Лъенара—Шипара выполнено.

Далее,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

т. е. выполнено и условие 2.

Таким образом, тривиальное решение уравнения асимптотически устойчиво.

Исследовать на устойчивость тривиальные решения уравнений:

954.  $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$

955.  $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0.$

956.  $y^{IV} + y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

957.  $y^V + 2y^{IV} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0.$



При каких значениях  $\alpha$  будут устойчивы тривиальные решения следующих уравнений

$$958. y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0?$$

$$959. y^{IV} + 2y''' + y'' + \alpha y' + 3y = 0?$$

$$960. y^{IV} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0?$$

При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  будут устойчивы тривиальные решения следующих уравнений:

$$961. y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0?$$

$$962. y''' + \alpha y'' + \beta y' + 3y = 0?$$

$$963. y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + \beta y' + y = 0?$$

964. Какой вид имеют условия Гурвица для возвратного уравнения

$$\lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + 1 = 0$$

( $p$  и  $q$  — действительные)?

## § 27. Геометрический критерий устойчивости (критерий Михайлова)

Пусть имеем дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

Вопрос об устойчивости решения дифференциального уравнения (1) сводится к вопросу о расположении корней характеристического уравнения

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

на комплексной плоскости. Последний решается с помощью ниже следующего критерия Михайлова.

Пусть дан характеристический многочлен

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (3)$$

Подставив в него  $\lambda = i\omega$ , получим

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots, \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Величину  $f(i\omega)$  согласно (4) и (5) при заданном параметре  $\omega$  можно изобразить на комплексной плоскости  $uOv$  в виде вектора. Если изменять параметр  $\omega$  в интервале  $(-\infty, +\infty)$ , то конец этого вектора опишет некоторую кривую, каждая точка которой соответствует определенному значению  $\omega$ .

Полученный таким образом годограф вектора  $f(i\omega)$  называется *кривой Михайлова* для многочлена  $f(\lambda)$  (рис. 38).

При изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  вектор  $f(i\omega)$  повернется на некоторый угол  $\varphi$ . Если многочлен  $f(\lambda)$  имеет  $m$  корней с положительными вещественными частями, а остальные  $n - m$  корней с отрицательными, то

$$\varphi = (n - m)\pi + m(-\pi) = (n - 2m)\pi. \quad (6)$$

**З а м е ч а н и е.** Так как функция  $u(\omega)$  четная, то кривая Михайлова симметрична относительно оси  $Ou$ , и поэтому достаточно строить часть кривой Михайлова, отвечающую изменению параметра  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ . Тогда формула (6) примет вид

$$\varphi = (n - m)\frac{\pi}{2} + m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n - 2m)\frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

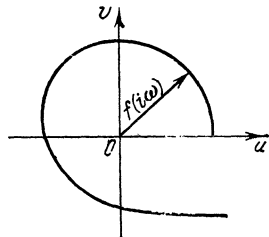


Рис. 38.

Для устойчивости решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения  $f(\lambda) = 0$  имели отрицательные вещественные части, т. е. в формуле (7) должно быть  $m = 0$ .

Отсюда вытекает следующая формулировка критерия Михайлова: для устойчивости тривиального решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы:

1) вектор  $f(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  совершил поворот на угол  $\varphi = n\frac{\pi}{2}$ , т. е. сделал  $\frac{n}{4}$  оборотов против часовой стрелки;

2) годограф  $f(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  не проходил через нулевую точку.

Иначе, для устойчивости решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова проходила поочередно  $n$  квадрантов против часовой стрелки, окружая все время начало координат.

Поочередное прохождение квадрантов означает, что кривая поочередно пересекает оси координат. Следовательно, координаты  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  точек кривой Михайлова для устойчивости решения должны поочередно обращаться в нуль. Отсюда вытекает вторая формулировка критерия устойчивости Михайлова:

Для устойчивости решения уравнения (1) необходимо (а при условии, что кривая проходит против часовой стрелки — и достаточно), чтобы все корни уравнений  $u(\omega) = 0$ ,  $v(\omega) = 0$  были вещественными и перемежающимися друг с другом, т. е. чтобы между любыми двумя корнями одного из этих уравнений находился корень другого уравнения

**Пример.** Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

**Решение.** Составляем характеристический многочлен

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Далее

$$f(i\omega) = \omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^2 + 2i\omega + 1,$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 3\omega^2 + 1,$$

$$v(\omega) = -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1 - \omega^2) = 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega).$$

Будем изменять  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  и построим кривую (рис. 39)

$$\begin{cases} u = u(\omega), \\ v = v(\omega), \end{cases}$$

$\omega$	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
$u$	1	0	-1	0
$v$	0	+	0	-

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{v}{u} = 0.$$

Угол поворота радиуса-вектора

$$\varphi = 4 \frac{\pi}{2} = (n-2m) \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда  $n-2m=4$ ;  $n=4$ ; следовательно,  $m=0$ . Таким образом, все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, т. е. тривиальное решение  $y \equiv 0$  асимптотически устойчиво.

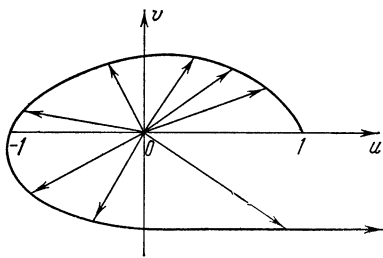


Рис. 39.

К этому же выводу можно было прийти, исходя из критерия Льенара—Шипара, поскольку все коэффициенты характеристического уравнения положительны и

$$\Delta_{n-1} = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_{n-3} = \Delta_1 = 2 > 0.$$

Исследовать на устойчивость тривиальные решения уравнений:

965.  $2y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

966.  $3y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

967.  $y^V + 5y^{IV} + 10y''' + 11y'' + 7y' + 2y = 0.$

968.  $y^{IV} + 5y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$

969.  $y^V + 2y^{IV} + 2y''' + 46y'' + 89y' + 260y = 0.$

970.  $y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$

$$971. y^{VII} + 7y^{VI} + 23y^V + 37y^{IV} + 56y''' + 36y'' + 12y' + 4y = 0.$$

$$972. y^{IV} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0.$$

$$973. y^{IV} + 7y''' + 18y'' + 22y' + 12y = 0.$$

$$974. y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

$$975. y^{IV} + 11y''' + 59y'' + 107y' + 60y = 0.$$

$$976. y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 53y' + 60y = 0.$$

$$977. y^{IV} + 6y''' + 15y'' + 18y' + 10y = 0.$$

$$978. y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0.$$

$$979. y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$$

$$980. y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$$

$$981. y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$982. y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0.$$

$$983. y^{IV} + 2y'' + 8y' + 5y = 0.$$

$$984. y^V + 4y^{IV} + 5y''' + 2y' + 4y = 0.$$

## § 28. D-разбиения

Пусть имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

Для суждения об устойчивости решения уравнения (1) нет необходимости вычислять корни характеристического уравнения. Достаточно лишь установить, что все они лежат в левой полуплоскости. Обычно встречаются две постановки этой задачи.

**Первая.** Считая заданными все коэффициенты уравнения (1), установить, устойчиво ли решение при этих значениях коэффициентов.

**Вторая.** Считая заданными некоторые коэффициенты уравнения (1), определить, при каких значениях других коэффициентов решение уравнения устойчиво.

### Построение областей устойчивости

**Понятие о D-разбиении.** Пусть имеем характеристическое уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

Совокупность значений коэффициентов уравнения (1) можно рассматривать как точку  $n+1$ -мерного пространства  $R_{n+1}$ . Каждой точке пространства  $R_{n+1}$  соответствует определенное значение коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , а следовательно, и определенное значение всех корней  $z_1, z_2, \dots, z_n$  характеристического уравнения (2). Если в  $R_{n+1}$  суще-

ствует такая область, что каждой ее точке соответствует характеристическое уравнение, все корни которого лежат в левой полуплоскости, то эта область называется *областью устойчивости*, а гиперповерхность, ограничивающая ее, называется *границей области устойчивости*. Пусть, например, в характеристическом уравнении (2) все коэффициенты, кроме двух, скажем  $a_1$  и  $a_2$ , — конкретные числа.

Предположим, что при некоторых определенных значениях  $a_1$  и  $a_2$  данное уравнение в плоскости корней (т. е. в плоскости  $z$ ) имеет  $k$  корней, лежащих слева, и  $(n-k)$  корней, лежащих справа от мнимой оси (рис. 40).

На плоскости  $A$  (плоскость параметров  $a_1$  и  $a_2$ ) существует кривая, ограничивающая такую область (рис. 41), каждая точка которой

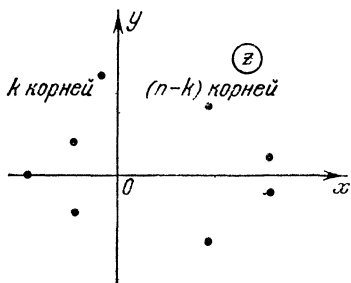


Рис. 40.

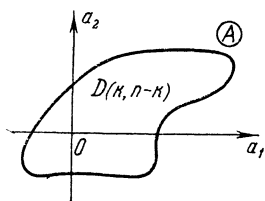


Рис. 41.

определяет многочлен, также имеющий  $k$  корней, лежащих слева, и  $n-k$  корней, лежащих справа от мнимой оси. Эту область обозначим через  $D(k, n-k)$  ( $k$  — целое,  $0 \leq k \leq n$ ).

Например, если характеристическое уравнение имеет третью степень, т. е.  $n=3$ , то в общем случае в пространстве коэффициентов могут быть указаны области

$$D(0, 3), D(1, 2), D(2, 1), D(3, 0).$$

Область  $D(3, 0)$  и будет областью устойчивости.

Заметим, что некоторые области, в частности  $D(3, 0)$ , могут отсутствовать.

Разбиение пространства коэффициентов характеристического уравнения на области, соответствующие одному и тому же числу корней, расположенных в левой полуплоскости плоскости  $z$ , называется  $D$ -разбиением пространства коэффициентов.

Аналогично можно построить  $D$ -разбиение пространства любых параметров, от которых могут зависеть коэффициенты характеристического уравнения.

Положим, что в характеристическом уравнении (2) коэффициенты зависят от двух параметров  $\xi$  и  $\eta$  (этим параметрами могут быть, в частности, просто два коэффициента рассматриваемого уравнения).

Рассмотрим семейство многочленов

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z), \quad (3)$$

где  $(\xi, \eta)$  — вещественные параметры, а  $P, Q, R$  — известные многочлены от  $z$  с вещественными коэффициентами.

Задача ставится так:

В плоскости параметров  $(\xi, \eta)$  (плоскость  $\omega$ ) найти область  $D(n, 0)$  такую, что для любой точки  $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$  многочлен (3) будет иметь все корни  $z$  в левой полуплоскости, или убедиться, что такой области нет.

Построение областей  $D(k, n-k)$  основано на следующих соображениях:

1. Корни алгебраического уравнения непрерывно зависят от его коэффициентов, т. е. если коэффициенты многочлена  $f(z, \xi, \eta)$  мало изменить, то и корни его изменятся мало.

2. Если точка  $(\xi, \eta)$  лежит на границе области  $D(k, n-k)$ , то хотя бы один корень многочлена (3) лежит на мнимой оси, т. е. граница  $D$ -разбиения является образом мнимой оси плоскости  $z$ .

Действительно, если, например, точка  $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$ , то многочлен (3) имеет при этом все корни в левой полуплоскости.

Если  $(\xi, \eta)$  лежит вне  $D(n, 0)$ , то многочлен (3) имеет хотя бы один корень в правой полуплоскости.

При непрерывном движении точки  $(\xi, \eta)$  из области  $D(n, 0)$  в соседнюю непрерывно меняются корни многочлена  $f(z, \xi, \eta)$ . Так как при этом появляется хотя бы один корень в правой полуплоскости, то в процессе изменения  $(\xi, \eta)$  он должен пересечь мнимую ось (ось  $Oy$ ). Это будет, когда точка  $(\xi, \eta)$  пересечет границу области  $D(n, 0)$ .

Пусть  $z = x + iy$  — корень многочлена  $f(z, \xi, \eta)$ . Равенство  $(z, \xi, \eta) = 0$  равносильно равенствам

$$\begin{cases} \xi u_1(x, y) + \eta u_2(x, y) + u_3(x, y) = 0, \\ \xi v_1(x, y) + \eta v_2(x, y) + v_3(x, y) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $u_1, u_2, u_3$  и  $v_1, v_2, v_3$  — вещественные и мнимые части многочленов  $P, Q$  и  $R$  соответственно.

Если определитель системы (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (4) однозначно разрешима относительно  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5) в точках, где  $\Delta \neq 0$ , определяют однозначное отображение плоскости корней многочлена  $f(z, \xi, \eta)$  на плоскость параметров  $(\xi, \eta)$ .

Обратное отображение неоднозначно: фиксированной паре значений  $(\xi, \eta)$  отвечает, вообще говоря,  $n$  корней. Если определитель системы (4) в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  обращается в нуль, то система либо несовместна, либо одно уравнение является следствием другого.

В этом последнем случае на плоскости параметров  $\omega$  существует целая прямая, состоящая из точек  $(\xi, \eta)$ , для которых  $z_0 = x_0 + iy_0$  является корнем многочлена  $f(z, \xi, \eta)$ . Такую точку  $(x_0, y_0)$ , а также соответствующую ей прямую будем называть *исключительными*.

Найдем на плоскости параметров  $(\xi, \eta)$  те точки, для которых многочлен (3) имеет хотя бы один чисто мнимый корень  $z = iy$ .

Геометрическое место таких точек состоит из линии, параметрические уравнения которой есть

$$\begin{cases} \xi = \xi(0, y), \\ \eta = \eta(0, y) \end{cases} \quad (-\infty < y < +\infty) \quad (6)$$

и которую можно получить, полагая  $x=0$  в уравнениях (5), а также из исключительных прямых, отвечающих исключительным точкам оси  $Oy$  (если таковые имеются).

Заметим, что уравнения (6) дают образ оси  $Oy$  при отображении (5).

Это геометрическое место точек будем называть *линией L*.

Линия  $L$  разбивает плоскость параметров на некоторое число связных областей.

Каждая из таких областей обладает тем свойством, что для любой ее точки  $(\xi, \eta)$  многочлен  $f(z, \xi, \eta)$  имеет одно и то же число корней, расположенных в левой полуплоскости, т. е. является областью типа  $D(k, n-k)$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

Таким образом, линия  $L$  — граница искомого  $D$ -разбиения.

Рассмотрим отображение (5) плоскости корней на плоскость параметров

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases}$$

Проведем через точку  $(x_0, y_0)$  две линии: горизонтальную  $I$  и вертикальную  $II$ .

Определение. Если направление поворота от  $I$  к  $II$  сохраняется при отображении (5), то говорят, что отображение *сохраняет ориентацию* в точке  $(x_0, y_0)$ ; в противном случае — что оно *не сохраняет ориентацию* (рис. 42 и 43).

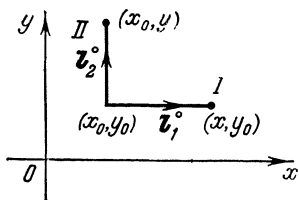


Рис. 42.

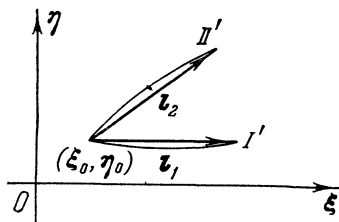


Рис. 43.

Если определитель

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} > 0$$

в точке  $(x_0, y_0)$ , то отображение (5) в точке  $(x_0, y_0)$  сохраняет ориентацию. При  $I < 0$  ориентация нарушается. Если  $I = 0$ , то вопрос

о сохранении или несохранении ориентации решают старшие производные. Можно показать (см. [10]), что знак определителя  $I$  совпадает со знаком определителя  $\Delta$ , где

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

так что если  $\Delta > 0$ , то отображение с плоскости корней на плоскость параметров сохраняет ориентацию, если  $\Delta < 0$ , то ориентация меняется.

Рассмотрим опять разбиение плоскости  $\omega$  (плоскость параметров) на области  $D(k, n-k)$  ( $k \leq n$ ) и обозначим через  $L$  границу этих областей. Положительным направлением на  $L$  будем считать то, которое соответствует возрастанию  $y$  (начиная с  $y = -\infty$ ); при этом кривая  $L$  может состоять из нескольких ветвей, и при полном обходе оси  $Oy$  ее участки могут проходиться по нескольку раз (не более  $n$ , где  $n$  — степень многочлена  $f(z, \xi, \eta)$ ).

Рассмотрим некоторый участок  $\omega_1\omega_2$  кривой  $L$  и предположим, что при полном обходе оси  $Oy$  он обходится  $r$  раз, т. е. что этому

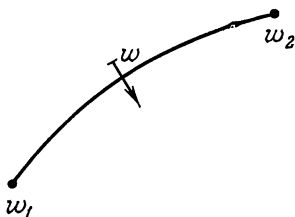


Рис. 44.

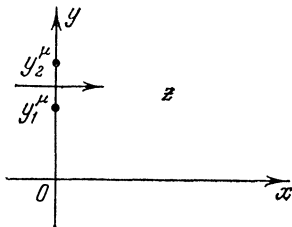


Рис. 45.

участку соответствует  $r$  участков  $y_1^\mu y_2^\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, r$ ) оси  $Oy$ . Положим  $\epsilon_\mu = 1$ , если направление  $y_1^\mu y_2^\mu$  совпадает с направлением оси  $Oy$ , и  $\epsilon_\mu = -1$  в противном случае. Положим также  $\delta_\mu = 1$ , если на  $y_1^\mu y_2^\mu$  определитель  $\Delta > 0$ , и  $\delta_\mu = -1$  — в противном случае. Пусть точка  $\omega$ , двигаясь непрерывно по некоторому достаточно малому пути, пересекает дугу  $\omega_1\omega_2$  слева направо (рис. 44). Этому пути в плоскости  $z$  соответствует  $r$  путей, пересекающих отрезки  $y_1^\mu y_2^\mu$  оси  $Oy$ . Если  $\epsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$ , то соответствующий путь идет из левой полуплоскости в правую и многочлен

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z)$$

приобретает на нем один корень с положительной действительной частью и теряет корень с отрицательной действительной частью; в случае  $\epsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$  — наоборот.

Действительно, пусть  $\epsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$ . Это может быть в двух случаях: 1)  $\epsilon_\mu = 1, \delta_\mu = 1$ ; 2)  $\epsilon_\mu = -1, \delta_\mu = -1$ . В первом случае направление отрезка  $y_1^\mu y_2^\mu$  оси  $Oy$  совпадает с положительным направлением этой оси ( $\epsilon_\mu = 1$ ) и сохраняется ориентация ( $\delta_\mu = 1$ ), т. е. если в плоскости  $\omega$  мы переходим дугу  $\omega_1\omega_2$  слева направо, то и в плоскости  $z$  мы переходим с левой полуплоскости в правую (т. е. ось  $Oy$  пересекаем тоже слева направо, рис. 45).



Во втором случае вектор  $\overrightarrow{y_1^\mu y_2^\mu}$  направлен в сторону, противоположную направлению  $\overrightarrow{Oy}$  ( $\varepsilon_\mu = -1$ ). Так как  $\delta_\mu = -1$ , то ориентация в этом случае меняется, и при переходе слева направо в плоскости  $\omega$  мы опять получаем переход слева направо в плоскости  $z$  через ось  $Oy$ .

Аналогично рассматривается случай  $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$ .

Итак, при переходе с левой стороны дуги  $\omega_1\omega_2$  кривой  $L$  на правую сторону многочлен  $f(z, \xi, \eta)$  теряет

$$N = \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \dots + \varepsilon_r\delta_r$$

корней с отрицательной действительной частью.

**Пример Вышнеградского.** Дан многочлен  $f(z) = z^3 + \xi z^2 + \eta z + 1$ . Найти область  $D(3, 0)$ .

**Решение.** Полагая  $z = iy$  и разделяя действительную и мнимую части, найдем параметрические уравнения кривой  $L$ :

$$\xi = \frac{1}{y^2}, \quad \eta = y^2.$$

Это — лежащая в первом квадранте ветвь гиперболы  $\xi\eta = 1$ . При полном обходе оси  $Oy$  ( $y$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ ) гипербола описывается два раза, т. е.  $r=2$ ; при этом один раз гипербола проходит в одном направлении при изменении  $y$  от  $-\infty$  до 0.

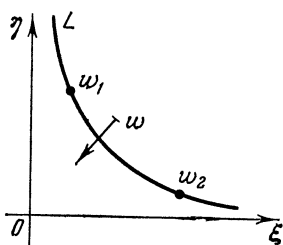


Рис. 46.

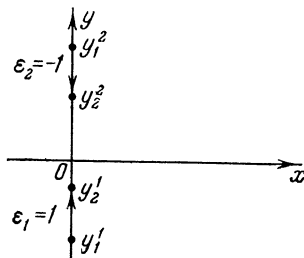


Рис. 47.

При дальнейшем изменении  $y$  от 0 до  $+\infty$  гипербола проходит второй раз, но уже в противоположном направлении. Таким образом, отрезку  $\omega_1\omega_2$  кривой  $L$  отвечают два отрезка оси  $Oy$ :  $y_1^1 y_2^1$  и  $y_1^2 y_2^2$  (рис. 46 и 47). Определитель  $\Delta$  на оси  $Oy$  равен  $\Delta = -y^3$ . Следовательно,  $\delta_1 = 1$  (ибо при  $\mu = 1$   $y < 0$ ), а  $\delta_2 = -1$  (ибо при  $\mu = 2$   $y > 0$ ). При переходе точки  $\omega$  через  $\omega_1\omega_2$  слева направо теряется  $N$  корней с отрицательной частью, где

$$N = \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 = 2.$$

В начале координат  $\xi = \eta = 0$  многочлен  $f(z)$  принимает вид  $z^3 + 1$  и имеет корни  $z_1 = -1$ ,  $z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ , следовательно, область под гиперболой есть  $D(1, 2)$ . Область над гиперболой есть область  $D(3, 0)$ . В самом деле, при переходе из этой области в  $D(1, 2)$  многочлен  $f(z)$

потерял два корня с отрицательной вещественной частью и превратился в многочлен, имеющий один корень с отрицательной вещественной частью. Следовательно, в области над гиперболой было три корня с отрицательной вещественной областью (рис. 48). Для проверки можно взять точку  $\xi = \eta = 3$ , в которой многочлен принимает вид

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1$$

и имеет трехкратный корень  $z = -1$ .

Таким образом, для построения  $D$ -областей поступаем так:

1. В многочлене  $f(z, \xi, \eta)$  полагаем  $z = iy$ , отделяем действительную и мнимую части и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \xi u_1(y) + \eta u_2(y) + u_3(y) = 0, \\ \xi v_1(y) + \eta v_2(y) + v_3(y) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Решая (7) относительно  $\xi$  и  $\eta$ , получаем

$$\begin{cases} \xi = \xi(y), \\ \eta = \eta(y) \end{cases}$$

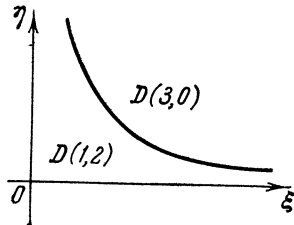


Рис. 48.

— параметрические уравнения линии  $L$ .

2. Строим кривую  $L$  на плоскости параметров, изменяя  $y$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , причем если в уравнениях (7)  $\xi$  — первое по порядку написания переменное, а  $\eta$  — второе, то при построении кривой  $L$  система координат  $\xi O \eta$  должна быть правой.

Если при некотором значении  $y$  определитель системы (7) и определители

$$\Delta_{\xi} = \begin{vmatrix} -u_3 & u_2 \\ -v_3 & u_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_{\eta} = \begin{vmatrix} u_1 & -u_3 \\ v_1 & -v_3 \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль, то при этом значении  $y$  одно из уравнений (7) является следствием другого, и для этого значения  $y$  получаем в плоскости  $\xi O \eta$  не точку, а прямую (особая или исключительная прямая). Ее мы также включаем в границу  $D$ -разбиения.

Если коэффициент при старшем члене характеристического уравнения зависит от параметров  $\xi$  и  $\eta$ , то, приравнявая этот коэффициент нулю, получаем уравнение еще одной особой прямой, соответствующей  $y = \infty$ .

Если, наконец, определитель системы (7)  $\Delta \equiv 0$ , то границей  $D$ -разбиения служат только особые прямые.

3. Выделяем связные области, на которые  $L$  разбивает плоскость параметров. Это и будут области  $D(k, n-k)$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

4. Определяем характер этих областей, т. е. находим  $k$  и  $n-k$ . Для этого выбираем в каждой из областей  $D(k, n-k)$  по одной точке  $(\xi_0, \eta_0)$  и исследуем полученный многочлен  $f(z, \xi_0, \eta_0)$  с числовыми коэффициентами на устойчивость с помощью изложенных выше критериев устойчивости Рауса—Гурвица или Михайлова (см. §§ 26 и 27).

Построить  $D$ -области для следующих многочленов:

985.  $z^3 + \xi z^2 + \eta z + 6$ .

986.  $z^4 + \xi z^3 + \eta z^2 + 4z + 1$ .

987.  $z^3 + \xi z^2 + 11z + \eta$ .      988.  $z^3 + (z^2 + 2)\xi + \eta z - 4$ .  
 989.  $z^4 + 2z^3 + \xi z^2 + z + \eta$ .      990.  $z^3 + 3z^2 + \xi z + \eta$ .  
 991.  $z^3 + \xi z^2 + (z + 1)\eta + 1$ .      992.  $z^3 + \eta z^2 + \xi z + 6$ .  
 993.  $z^3 + 2z^2 + \xi(z - 1) + \eta$ .      994.  $z^3 + \xi(z^2 + z) + z + 2\eta$ .  
 995.  $\xi z^3 + 3z^2 + \eta z + 1$ .  
 996.  $\xi(z^3 + z^2) + \eta(z^2 + 1) + 2z$ .  
 997.  $\xi(z^3 - z) + \eta(z^2 + z - 1) + 1$ .

## § 29. Устойчивость решений разностных уравнений

1. Решение однородных линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть имеем разностное уравнение порядка  $k$ :

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = 0, \quad (1)$$

где  $a_k \neq 0$ ;  $f(n)$  — искомая функция целочисленного аргумента;  $a_1, \dots, a_k$  — действительные постоянные.

Для нахождения нетривиальных (ненулевых) решений уравнения (1) составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k = 0. \quad (2)$$

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  — корни уравнения (2).

Возможны следующие случаи:

1)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  — вещественные и различные.

Общим решением уравнения (1) будет

$$f(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n, \quad (3)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_k$  — произвольные постоянные, которые могут быть определены, если заданы начальные условия

$$f(0) = f_0, \quad f(1) = f_1, \quad \dots, \quad f(k-1) = f_{k-1}.$$

2) Корни характеристического уравнения действительные, но среди них есть кратные. Пусть, например,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_j = \tilde{\lambda}$ , т. е.  $\lambda$  является  $j$ -кратным корнем уравнения (2), а все остальные  $k-j$  корней различные.

Общим решением уравнения (1) будет

$$f(n) = C_1 \tilde{\lambda}^n + C_2 n \tilde{\lambda}^n + \dots + C_j n^{j-1} \tilde{\lambda}^n + C_{j+1} \lambda_{j+1}^n + \dots + C_k \lambda_k^n. \quad (4)$$

3) Среди корней характеристического уравнения (2) имеются простые комплексные корни. Пусть, например, для определенности

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

$$\lambda_3 = \gamma + i\delta, \quad \lambda_4 = \gamma - i\delta,$$

остальные корни действительные и различные.

Общее решение (1) имеет тогда вид

$$f(n) = C_1 |\lambda_1|^n \cos(n \arg \lambda_1) + C_2 |\lambda_1|^n \sin(n \arg \lambda_1) + C_3 |\lambda_3|^n \cos(n \arg \lambda_3) + C_4 |\lambda_3|^n \sin(n \arg \lambda_3) + C_5 \lambda_5^n + \dots + C_k \lambda_k^n. \quad (5)$$

4) В случае, если  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  является  $j$ -кратным корнем уравнения (2) ( $j \leq \frac{k}{2}$ ), то  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  также будет  $j$ -кратным корнем и общее решение (1) имеет вид

$$f(n) = (C_1 + C_2 n + \dots + C_j n^{j-1}) |\lambda_1|^n \cos(n \arg \lambda_1) + \\ + (C_{j+1} + C_{j+2} n + \dots + C_{2j} n^{j-1}) |\lambda_1|^n \sin(n \arg \lambda_1) + \\ + C_{2j+1} \lambda_{2j+1}^n + \dots + C_k \lambda_k^n. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Корень  $\lambda = 0$  соответствует тривиальному (нулевому) решению  $f(n) \equiv 0$ .

П р и м е р 1. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) + 4f(n+1) + f(n) = 0.$$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0.$$

Его корни  $\lambda_1 = -2 - \sqrt{3}$ ,  $\lambda_2 = -2 + \sqrt{3}$  различные и действительные; следовательно,

$$f(n) = C_1 (-2 - \sqrt{3})^n + C_2 (-2 + \sqrt{3})^n.$$

П р и м е р 2. Найти общее решение уравнения

$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Отсюда  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Общим решением будет

$$f(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2) \cdot 1^n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2.$$

П р и м е р 3. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

имеет простые комплексные корни

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Находим

$$|1 \pm i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}.$$

Общее решение имеет вид

$$f(n) = C_1 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} = 2^{\frac{n}{2}} \left( C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

П р и м е р 4. Найти общее решение уравнения

$$f(n+4) + 2f(n+3) + 4f(n+2) - 2f(n+1) - 5f(n) = 0.$$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0.$$

Перепишем его в виде

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0.$$

Корнями этого уравнения будут

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1 + 2i, \quad \lambda_4 = -1 - 2i.$$

Здесь

$$|-1 \pm 2i| = \sqrt{5}, \quad \arg(-1 + 2i) = \pi - \arctg 2.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$f(n) = C_1 + C_2(-1)^n + [C_3 \cos n(\pi - \arctg 2) + C_4 \sin n(\pi - \arctg 2)] 5^{\frac{n}{2}}$$

или

$$f(n) = C_1 + C_2(-1)^n + (-1)^n 5^{\frac{n}{2}} [C_3 \cos(n \arctg 2) - C_4 \sin(n \arctg 2)].$$

Решить следующие разностные уравнения:

998.  $3f(n+2) - 2f(n+1) - 8f(n) = 0.$

999.  $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = 0,$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 3.$$

1000.  $4f(n+2) - 8f(n+1) + 5f(n) = 0.$

1001.  $f(n+3) - 8f(n) = 0.$

1002.  $f(n+4) - f(n+2) + 2f(n+1) + 2f(n) = 0.$

II. Решение неоднородных линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть имеем неоднородное линейное разностное уравнение  $k$ -го порядка

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = g(n) \quad (7)$$

с постоянными действительными коэффициентами  $a_1, \dots, a_k$ . Общее решение этого уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

1) Пусть правая часть  $g(n)$  уравнения (7) имеет вид

$$g(n) = r^n u(n),$$

где  $u(n)$  — многочлен от  $n$  степени  $m$ , а  $r$  — действительное число.

Если  $r$  не является корнем характеристического уравнения (2), то частное решение  $\tilde{f}(n)$  ищется в виде

$$\tilde{f}(n) = r^n \tilde{u}(n),$$

где  $\tilde{u}(n)$  — многочлен степени  $m$ ; если же  $r$  является  $j$ -кратным корнем уравнения (2), то  $\tilde{u}(n)$  — многочлен степени  $m+j$ .

2) Если правая часть  $g(n)$  уравнения имеет вид

$$g(n) = u(n) \sin \alpha n \quad \text{или} \quad g(n) = u(n) \cos \alpha n,$$

то частное решение ищется в виде

$$\hat{f}(n) = \tilde{u}(\tilde{n}) \sin \alpha n + \tilde{\tilde{u}}(\tilde{n}) \cos \alpha n.$$

3) Если  $g(n) = u(n) \operatorname{sh} \alpha n$  или  $g(n) = u(n) \operatorname{ch} \alpha n$ , то частное решение ищется в виде

$$\tilde{f}(n) = \tilde{u}(n) \operatorname{sh} \alpha n + \tilde{\tilde{u}}(n) \operatorname{ch} \alpha n.$$

Здесь и в п. 2)  $\tilde{u}(n)$  и  $\tilde{\tilde{u}}(n)$  — многочлены, степень которых определяется по правилу, указанному в п. 1).

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 2^n(n+1). \quad (8)$$

Решение. Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2.$$

Так как число 2 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\tilde{f}(n) = 2^n(An + B), \quad (9)$$

где  $A$  и  $B$  — неопределенные коэффициенты. Подставляя (9) в (8), получим

$$2^{n+2}(An + 2A + B) - 4 \cdot 2^{n+1}(An + A + B) + 3 \cdot 2^n(An + B) = 2^n(n+1)$$

или

$$4(An + 2A + B) - 8(An + A + B) + 3(An + B) = n + 1.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} 4A - 8A + 3A &= 1, \\ 8A + 4B - 8A - 8B + 3B &= 1, \end{aligned}$$

так что  $A = -1$ ,  $B = -1$ .

Таким образом, частное решение данного уравнения

$$\tilde{f}(n) = -2^n(n+1);$$

общее решение

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2 - 2^n(n+1).$$

В следующих задачах найти общие решения данных неоднородных линейных разностных уравнений:

1003.  $f(n+2) - 2f(n+1) - f(n) = n.$

1004.  $f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 3^n \cdot 32$ ,  $f(0) = 0$ ,  
 $f(1) = 0.$

1005.  $f(n+2) + f(n) = \sin 2n$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1.$

1006.  $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = e^n.$

1007.  $f(n+3) + 8f(n) = 2^n.$

III. Устойчивость решений разностных уравнений. Решение  $f^*(n)$  разностного уравнения порядка  $k$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$f^*(0) = f_0^*, \quad f^*(1) = f_1^*, \quad \dots, \quad f^*(k-1) = f_{k-1}^*,$$

называется *устойчивым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$

такое, что для любого решения  $f(n)$  уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$f(0) = f_0, \quad f(1) = f_1, \quad \dots, \quad f(k-1) = f_{k-1},$$

из совокупности неравенств

$$|f_0 - f_0^*| < \delta, \quad |f_1 - f_1^*| < \delta, \quad \dots, \quad |f_{k-1} - f_{k-1}^*| < \delta$$

следует неравенство  $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$  при любом  $n \geq 0$ .

Если при сколь угодно малом  $\delta(\varepsilon) > 0$  неравенство  $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$  не выполняется для какого-либо решения  $f(n)$ , то решение  $f^*(n)$  называется *неустойчивым*.

Если кроме выполнения неравенства  $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$  выполняется также условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n) - f^*(n)] = 0,$$

то решение  $f^*(n)$  называется *асимптотически устойчивым*.

Исследование на устойчивость решения  $f^*(n)$  неоднородного линейного разностного уравнения

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = g(n)$$

с помощью замены  $\varphi(n) = f(n) - f^*(n)$  сводится к исследованию устойчивости нулевого (тривиального) решения однородного уравнения

$$\varphi(n+k) + a_1 \varphi(n+k-1) + \dots + a_k \varphi(n) = 0.$$

В дальнейшем мы ограничимся исследованием устойчивости только тривиальных решений однородных уравнений.

**Пример 6.** Исходя из определения устойчивости разностного уравнения, исследовать на устойчивость решение уравнения

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0, \quad (10)$$

удовлетворяющее начальным условиям  $f(0) = 0, f(1) = 0$ .

**Решение.** Решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям  $f(0) = 0, f(1) = 0$ , есть

$$f(n) \equiv 0,$$

ибо из (10)

$$f(n+2) = f(n+1) - \frac{1}{2} f(n).$$

Любое решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям  $f(0) = 0, f(1) = 0$ , имеет вид

$$f^*(n) = \frac{1}{2^{n/2}} \left[ f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4} \right].$$

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и покажем, что существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что при  $|f_0 - 0| < \delta$  и  $|f_1 - 0| < \delta$  имеет место неравенство

$$|0 - f^*(n)| = \frac{1}{2^{n/2}} \left| f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4} \right| < \varepsilon$$

для всех  $n \geq 0$ . Это и будет означать согласно определению, что нулевое решение  $f^*(n) \equiv 0$  устойчиво.

Очевидно, что

$$\frac{\left| f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{2^{n/2}} \leq \frac{|f_0| + |f_1 - f_0|}{2^{n/2}} \leq \\ \leq |f_0| + |f_1 - f_0| \leq |f_0| + |f_1| + |f_0| \leq 2(|f_0| + |f_1|)$$

для всех  $n \geq 0$ . Поэтому, если  $|f_0| + |f_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ , то и по-прежнему  $|0 - f^*(n)| < \varepsilon$  для всех  $n \geq 0$ . Следовательно, если, например, взять  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$ , то при  $|f_0| < \delta$  и  $|f_1| < \delta$  будет выполняться неравенство  $|0 - f^*(n)| < \varepsilon$  для всех  $n \geq 0$ , так что нулевое решение данного уравнения устойчиво. Эта устойчивость асимптотическая, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [0 - f^*(n)] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4}}{2^{n/2}} = 0.$$

Исходя из определения устойчивости, исследовать на устойчивость нулевые решения следующих разностных уравнений:

**1008.**  $8f(n+2) + 2f(n+1) - f(n) = 0.$

**1009.**  $f(n+2) + f(n) = 0.$

**1010.**  $4f(n+2) - 4f(n+1) + f(n) = 0.$

**1011.**  $f(n+2) - 6f(n+1) - 7f(n) = 0.$

Для исследования на устойчивость нулевого решения  $f(n) \equiv 0$  уравнения (1) пользуются следующим общим правилом

1. Если все корни характеристического уравнения (2) по модулю меньше единицы то решение  $f(n) \equiv 0$  уравнения (1) асимптотически устойчиво.

2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения по модулю больше единицы, то решение  $f(n) \equiv 0$  неустойчиво.

3. Если характеристическое уравнение имеет простые корни с модулями, равными единице, а остальные корни, если они есть, по модулю меньше единицы, то решение  $f(n) \equiv 0$  устойчиво, но не асимптотически.

4. Если характеристическое уравнение имеет хотя бы один кратный корень с модулем, равным единице, то решение  $f(n) \equiv 0$  неустойчиво.

Указанное правило сводит вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (1) к выяснению того, каковы модули корней характеристического уравнения (2).

**Пример 7.** Исследовать на устойчивость нулевое решение  $f(n) \equiv 0$  уравнения

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

**Решение.** Составляем характеристическое уравнение

$$2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$



Его корни  $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}$ . Имеем

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1 \pm i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Следовательно, решение  $f(n) \equiv 0$  этого уравнения асимптотически устойчиво.

**Пример 8.** Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 5f(n) = 0.$$

**Решение.** Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Имеем

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |1 \pm 2i| = \sqrt{5} > 1.$$

Оба корня по модулю больше единицы, значит, решение  $f(n) \equiv 0$  неустойчиво.

Известно, что функция

$$\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$$

отображает внутренность единичного круга плоскости  $\lambda$  на левую полуплоскость плоскости  $\omega$ . Корням характеристического уравнения (2), лежащим внутри единичного круга  $|\lambda| < 1$  (т. е. по модулю меньшим единицы), будут соответствовать корни преобразованного уравнения

$$(\omega + 1)^k + a_1(\omega + 1)^{k-1}(\omega - 1) + \dots + a_k(\omega - 1)^k = 0$$

или

$$b_0\omega^k + b_1\omega^{k-1} + \dots + b_n = 0, \quad (11)$$

лежащие в левой полуплоскости плоскости  $\omega$ .

Вопрос о расположении корней уравнения (11) может быть решен с помощью критерия Рауса — Гурвица или критерия Михайлова.

**Пример 9.** Найти необходимые и достаточные условия того, что корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (12)$$

находятся в единичном круге  $|\lambda| < 1$ .

**Решение.** Полагаем  $\lambda = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$ . Тогда уравнение (12) примет вид

$$(\omega + 1)^2 + a_1(\omega + 1)(\omega - 1) + a_2(\omega - 1)^2 = 0$$

или

$$(1 + a_1 + a_2)\omega^2 + (2 - 2a_2)\omega + (1 - a_2 + a_2) = 0. \quad (13)$$

К многочлену (13) применяем критерий Рауса — Гурвица (см. § 26). Матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 - 2a_2 & 1 + a_1 + a_2 \\ 0 & 1 - a_1 + a_2 \end{pmatrix}.$$

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = 2 - 2a_2, \quad \Delta_2 = (2 - 2a_2)(1 - a_1 + a_2).$$

В силу указанного критерия должно быть

$$1 + a_1 + a_2 > 0, \quad 1 - a_2 > 0, \quad 1 - a_1 + a_2 > 0. \quad (14)$$

Итак, характеристическое уравнение (12) имеет в круге  $|\lambda| < 1$  корни тогда и только тогда, когда выполняются условия (14).

**Следствие.** Линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$f(n+2) + a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = 0$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение  $f(n) \equiv 0$  тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям (14).

**Пример 10.** Исследовать на устойчивость нулевое решение  $f(n) \equiv 0$  уравнения

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

**Решение.** Перепишем это уравнение в виде

$$f(n+2) - f(n+1) + \frac{1}{2} f(n) = 0.$$

Здесь  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 0,5$ . Поэтому

$$1 + a_1 + a_2 = 0,5 > 0,$$

$$1 - a_2 = 0,5 > 0,$$

$$1 - a_1 + a_2 = 2,5 > 0.$$

Условия (14) критерия Рауса—Гурвица выполнены. Значит, решение  $f(n) \equiv 0$  асимптотически устойчиво.

**Пример 11.** Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$f(n+2) + f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

**Решение.** Здесь  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ . Имеем

$$1 + a_1 + a_2 = 4 > 0,$$

$$1 - a_2 = -1 < 0.$$

Нулевое решение неустойчиво.

Для следующих разностных уравнений найти необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения:

1012.  $a_0 f(n+3) + a_1 f(n+2) + a_2 f(n+1) + a_3 f(n) = 0.$

1013.  $f(n+4) + pf(n+2) + qf(n) = 0.$

1014.  $f(n+5) + pf(n) = 0.$

1015.  $af(n+5) - bf(n) = 0, \quad a \neq 0, \quad b > 0.$

Используя критерий Рауса—Гурвица, исследовать на устойчивость нулевое решение следующих разностных уравнений:

$$1016. \quad 11f(n+4) - 8f(n+3) + 8f(n+2) - 4f(n+1) + \\ + f(n) = 0.$$

$$1017. \quad f(n+4) + f(n+3) + f(n) = 0.$$

$$1018. \quad 12f(n+4) - 3f(n+3) + 2f(n+2) + 2f(n+1) - \\ - 2f(n) = 0.$$

$$1019. \quad 7f(n+4) - 4f(n+3) + 30f(n+2) - 4f(n+1) + \\ + 3f(n) = 0.$$

$$1020. \quad f(n+5) - f(n+1) + f(n) = 0.$$

$$1021. \quad f(n+5) - f(n+2) - f(n) = 0.$$

$$1022. \quad f(n+5) + f(n+1) - f(n) = 0.$$

## ОТВЕТЫ

2.  $x = \frac{20}{17}$ ,  $y = -\frac{36}{17}$ . 3.  $x = \frac{-b}{a^2 + b^2}$ ,  $y = \frac{-a}{a^2 + b^2}$ .

4. Действительного решения нет. 5.  $\frac{2(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$ .

7.  $x = \frac{u^2 + v^2 - u}{(1-u)^2 + v^2}$ ,  $y = -\frac{v}{(1-u)^2 + v^2}$ .

8.  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

9. а)  $\rho = 5$ ,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ ; б)  $\rho = 4$ ,  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ ; в)  $\rho = 5\sqrt{2}$ ,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} - \pi$ ; г)  $\rho = 1$ ,  $\varphi = \frac{4}{5}\pi$ ; д)  $\rho = 5$ ,  $\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ ; е)  $\rho = 1$ ,  $\varphi = 2\pi - \alpha$ .

10. а)  $2(\cos \pi + i \sin \pi)$ ; б)  $2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ ; в)  $2\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)$ ; г)  $\sqrt{2(1 - \sin \alpha)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$ ;

д)  $1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ; е)  $2e^{i\pi}$ ; ж)  $1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ ; з)  $1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ; и)  $2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ ;  
к)  $1 \cdot e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ ; л)  $\sqrt{34}e^{i \operatorname{arctg} \frac{3}{5}}$

11. У к а з а н и е. Так как  $x^2 - 2\lambda x \cos \alpha + \lambda^2 = [x - \lambda(\cos \alpha + i \sin \alpha)][x - \lambda(\cos \alpha - i \sin \alpha)]$ , то надо показать, что  $f[\lambda(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)] = 0$ .

12. а)  $-2^{19}(1 + i\sqrt{3})$ ; б)  $2^{10}(1 + i)$ ; в) 1728; г) 1.

13. У к а з а н и е. Воспользуемся соотношением

$$\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)}$$

и применим формулу Муавра к числителю и знаменателю.

15. а)  $3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$ ; б)  $\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$ ; в)  $4 \sin \varphi \times \cos^3 \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi$ ; г)  $\cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$ ; д)  $5 \sin \varphi \times \cos^4 \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi$ ; е)  $\cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \times \sin^4 \varphi$ .

16. а)  $\pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ ; б)  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ ; в)  $\frac{1}{2}(\pm \sqrt{3} + i)$ ,  $-i$ ;

г)  $\pm \left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}\right)$ ,  $\pm \left(\cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi\right)$ .

17. а)  $\pm 1, \pm i$ ; б)  $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i), \sqrt[9]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right), \sqrt[9]{12}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$ ; в)  $\pm(\sqrt{3}-i)$ .
18.  $\sqrt[10]{2}(\cos 6^\circ+i\sin 6^\circ); \sqrt[10]{2}(\cos 78^\circ+i\sin 78^\circ); \sqrt[10]{2}(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ); \sqrt[10]{2}(\cos 222^\circ+i\sin 222^\circ); \sqrt[10]{2}(\cos 294^\circ+i\sin 294^\circ)$ .
19. а) Вся комплексная плоскость, из которой вырезан круг радиуса 2 с центром в начале координат. б) Круг радиуса  $r=1$  с центром в начале координат, причем центр этого круга удален (круг «проколот»). в) Вся комплексная плоскость, из которой вырезан круг радиуса  $r=1/2$  с центром в начале координат.
20. а) Окружность радиуса  $r=8$  с центром в точке  $z=5i$ . б) Круг вместе с границей радиуса  $r=4$  с центром в точке  $z=1+i$ .
21. а) Часть кольца, ограниченного двумя лучами  $\arg z=\pi/4$  и  $\arg z=\pi/2$  и окружностями радиусов  $r=1$  и  $r=2$  с центром в точке  $z=-i$ . б) Часть кольца, ограниченного двумя лучами  $\arg z=\frac{\pi}{8}$  и  $\arg z=\frac{4}{3}\pi$  и окружностями радиусов  $r=2$  и  $r=3$  с центром в точке  $z=0$ . Множество также включает часть луча  $\arg z=\frac{4}{3}\pi$  между указанными окружностями и часть окружности радиуса 3 между указанными лучами.
22. а) Правая полуплоскость, включая и ось  $OY$ ; б) полоса между прямыми  $y=0$  и  $y=1$ , включая эти прямые.
23. а) Концентрическое кольцо, ограниченное окружностями радиусов  $R_1=1$  и  $R_2=2$  с центром в точке  $z_0=-(2+i)$ . Обе окружности принадлежат множеству; б) часть плоскости, расположенная ниже прямой  $y=x$ ; в) полоса между прямыми  $x=1$  и  $x=2$ .
24. Внутренность единичной окружности.
25. а) Внешность параболы  $y=\frac{x^2}{4}-1$ ; б) действительная полуось, включая и точку  $(0, 0)$ .
26. Внутренность гиперболы  $xy=-\frac{1}{2}$ .
27. Кольцевая область между эллипсами  $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$  и  $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$ , включая и сами эллипсы.
28. а) Внутренность окружности  $x^2+(y-1)^2=1$ ; б) область, заключенная между окружностями  $(x-1)^2+(y-1)^2=2$  и  $(x-2)^2+(y-2)^2=8$ .
29. Прямую  $x=-2$ .
30. Прямую  $y=2$ .
31. а) Гипербола  $xy=1$ ; б) гипербола  $x^2-y^2=1$ ; в) окружность  $x^2+(y+1)^2=1$ .

32. а) Окружность  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ; б) гипербола  $xy = -1$ .

33. Гипербола  $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ .

34. Окружность  $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ .

35. а) Эллипс  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ ; б) луч на оси  $OY$  от  $-1$  до  $-\infty$ .

36. а) Гипербола  $\frac{\left(y + \frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ ; б) эллипс  $\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2} = 1$ .

37. а) Окружность  $x^2 + y^2 = 1$ ; б) прямая, перпендикулярная к отрезку  $z_1 z_2$  и проходящая через его середину; в) гипербола  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$ ; г) парабола  $y^2 = 2x + 1$ .

38. а)  $\bar{z} - z = 0$  и  $\bar{z} + z = 0$ ; б)  $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$ ; в)  $k(z + \bar{z}) + 2b + i(z - \bar{z}) = 0$ .

39. а)  $z^2 + \bar{z}^2 = 2a^2$ ; б)  $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$ .

40.  $-(1 + \sqrt[3]{2})$ ;  $-1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}$ .

41.  $-1$ ; 3;  $1 \pm 2i$ . 42.  $z = \frac{2z_1 + z_2}{3}$ . 43.  $b + ai$ .

44.  $-3 - i\sqrt{3}$ . 45.  $\sqrt{3} - i$ .

46. Р е ш е н и е. По условию задачи имеем

$$(4 - 3i)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \frac{5}{\sqrt{2}}(-1 + i)$$

или

$$\begin{cases} 4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi = -\frac{5}{\sqrt{2}}, \\ -3 \cos \varphi + 4 \sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отсюда  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ,  $\cos \varphi = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$ , т. е.  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{7}$ , а зна-

чит,  $\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$ .

47.  $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ . 48.  $x_k = \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ).

49.  $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). 50.  $-\sqrt{2} + i7\sqrt{2}$ .

51.  $z_1 = 3 + i$ ,  $z_2 = 1 + 3i$ ,  $z_3 = -1 + i$ .

53. Р е ш е н и е. Рассмотрим сумму

$S_n = (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx)$ .

Применяя формулу Муавра, получим

$$S_n = (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + \dots + (\cos x + i \sin x)^n.$$

Это есть сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \cos x + i \sin x$  и первым членом  $a_1 = \cos x + i \sin x$ . Она равна

$$S_n = \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos nx + i \sin nx)(\cos x + i \sin x)}{1 - (\cos x + i \sin x)}.$$

Отделяя действительную и мнимую части, найдем

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{(n+1)x}{2} + i \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{(n+1)x}{2}.$$

Отсюда

$$\text{а) } \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{(n+1)x}{2};$$

$$\text{б) } \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{(n+1)x}{2}.$$

$$54. \text{ а) } \frac{\sin^2 nx}{\sin x}; \text{ б) } \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

$$55. \text{ а) } u = x + 2xy, \quad v = y^2 - x^2 - y; \quad \text{б) } u = x^2 - y^2, \quad v = 1 + 2xy;$$

$$\text{в) } u = 3xy^2 - x^3, \quad v = 1 - 3x^2y + y^3; \quad \text{г) } u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \text{д) } u = \frac{x - 2xy - y + 1}{(x+1)^2 + y^2}, \quad v = \frac{x^2 + y - y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}; \quad \text{е) } u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

$$56. \text{ а) } \omega = -1; \quad \text{б) } \omega = -3 - 4i; \quad \text{в) } \omega = \frac{1+i}{2}; \quad \text{г) } \omega = -\frac{5+12i}{13}.$$

57. а) Окружность  $u^2 + v^2 = 4$ , проходящая по ходу часовой стрелки; б) ось  $Ov$  (исключая точку  $O$ ), проходящая так: сначала от  $0$  до  $+\infty$ , а затем от  $-\infty$  до  $0$ ; в) луч, идущий по биссектрисе  $III$  координатного угла из  $\infty$  в  $0$ ; г) луч, идущий по биссектрисе  $I$  координатного угла из  $\infty$  в  $0$ ; д) биссектриса  $II$  координатного угла, пробегаемая из  $0$  до  $\infty$ , и биссектриса  $IV$  координатного угла, пробегаемая из  $\infty$  в  $0$ ; е) положительная действительная полуось, пробегаемая из  $+\infty$  в  $0$ .

58. а) Ось  $Ox$  переходит в ось  $Ou$ , причем при изменении  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  ось  $Ou$  пробегается от  $+1$  до  $-\infty$  и от  $+\infty$  до  $+1$  (точка  $1$  исключается). Ось  $Oy$  переходит в окружность  $u^2 + v^2 = 1$ . б) Ось  $Ox$  переходит в ось  $Ou$  так же, как и в п. а). Ось  $Oy$  переходит в прямую  $u = 1$ , пробегаемую от точки  $+1$  до  $1+i\infty$  и от  $1-i\infty$  до  $+1$  (точка  $1$  исключается).

$$59. \text{ а) } u = 2x - 1, \quad v = 2y; \quad \text{б) } u = x^2 - y^2 + x, \quad v = (2x + 1)y; \quad \text{в) } u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

60. а)  $u = e^{-x} \cos y$ ,  $v = -e^{-x} \sin y$ ; б)  $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$ ,  $v = -e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$ ; в)  $u = \sin x \operatorname{ch} y$ ,  $v = \cos x \operatorname{sh} y$ ; г)  $u = \operatorname{ch} x \cos(y-1)$ ,  $v = \operatorname{sh} x \sin(y-1)$ .

$$61. \text{ а) } \begin{cases} u = e^{(x^2 - y^2) \ln 2 - 4k\pi xy} \cos [2k\pi (x^2 - y^2) + 2 \ln 2 \cdot xy], \\ v = e^{(x^2 - y^2) \ln 2 - 4k\pi xy} \sin [2k\pi (x^2 - y^2) + 2 \ln 2 \cdot xy] \end{cases}$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

б)  $u = \operatorname{ch} x \cos y$ ,  $v = \operatorname{ch} x \sin y$ ; в)  $u = \frac{\sin x \cos x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$ ,  $v = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$ .

62. а)  $\rho = 3/4$ ,  $\varphi_0 = -\pi/2$ ; б)  $\rho = 5/4$ ,  $\varphi_0 = \pi$ .

63.  $\rho = \operatorname{ch} 1$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$ . 64.  $\rho = \pi$ ,  $\varphi_0 = -\pi/2$ .

65.  $\rho = \cos^2(\ln 3)$ ,  $\varphi_0 = 0$ .

66. а)  $1 + 2k\pi i$ . Здесь и далее, если не оговорено противное,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; б)  $(2k - \frac{1}{2})\pi i$ ; в)  $(2k + \frac{1}{2})\pi i$ ; г)  $\ln \sqrt{2} + (2k - \frac{3}{4})\pi i$ ; д)  $\ln \sqrt{13} + (2k\pi - \operatorname{arctg} \frac{2}{3})i$ ; е)  $-(2k + \frac{1}{2})\pi + 2m\pi \cdot i$  ( $k, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

67. а)  $e^{-(2k + \frac{1}{2})\pi}$ ; б)  $e^{(2k + \frac{1}{2})\pi}$ ; в)  $e^{-2k\pi}$ ;  
г)  $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$ ; д)  $e^{-(4k + \frac{1}{2})\pi}$ ; е)  $e^{(i-1)(2k + \frac{1}{6})\pi}$ ;  
ж)  $2^{3/2} e^{3(2k\pi - \frac{\pi}{4})} - 3(\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} - 2k\pi)i$ .

68. а)  $\rho = 0$ ,  $\varphi$  — неопределен; б)  $\rho = e^{-2k\pi}$ ,  $\varphi = \ln 10 + 2m\pi$  ( $k, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); в)  $\rho = 9e^{2k\pi}$ ,  $\varphi = -\ln 3 + 2m\pi$  ( $k, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

69. а)  $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; б)  $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} \pi i$ .

70. а)  $i \operatorname{sh} \pi$ ; б)  $\operatorname{ch} \pi$ ; в)  $i \operatorname{th} \frac{\pi}{2}$ .

71. а)  $-i \operatorname{cth} \pi$ ; б)  $2k\pi - i \ln(\sqrt{2}-1)$ ,  $(2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{2}+1)$ ;  
в)  $(2k + \frac{1}{2})\pi - i \ln(\sqrt{2}+1)$ ,  $(2k - \frac{1}{2})\pi - i \ln(\sqrt{2}-1)$ .

72. а)  $k\pi + i\frac{\ln 2}{2}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); б)  $i$ ; в) 0.

73.  $z_k = (2k+1)\pi i$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

74.  $z_k = (2k - \frac{1}{2})\pi i$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

75.  $z_k = (2k+1)\pi \pm i \ln 2$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

76.  $z_k = (k - \frac{1}{2})\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

77.  $z_{2k} = 2k\pi - i \ln(\sqrt{\pi^2 + 1} - \pi)$ ,

$z_{2k+1} = (2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{\pi^2 + 1} + \pi)$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).



78.  $x=0$ .

79.  $z_{2k} = 2k\pi i$ ,  $z_{2k+1} = (2k+1)\pi i + \ln 3$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

80.  $z_k = \ln(1+\sqrt{2}) + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ ,  $z_k = \ln(\sqrt{2}-1) + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$   
( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

81. а)  $z=1-i$ ; б)  $z=-e+i$ . 82. 1.

83. 0. 84. Не существует. 85. 0. 86.  $1/3$ .

87.  $-i$ . 88.  $i$ . 89. Не существует. 90. 0. 94.  $i$ .

95.  $\sqrt{2}$ . 96.  $-i$ . 97.  $-2i$ .

104. а) нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) да.

105. а) нет; б) нет; в) нет; г) да.

109. У к а з а н и е. Для любых двух направлений, характеризующихся единичными векторами  $s^0$  и  $n^0$ , связанными условием  $n^0 = is^0$ , имеют место обобщенные условия Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial u}{\partial n}. \quad (1)$$

Чтобы получить условия Коши—Римана в полярных координатах

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad (2)$$

надо в качестве  $s^0$  взять единичный вектор касательной к окружности  $|z|=\rho$ , направленный против часовой стрелки, а за  $n^0$ —вектор внутренней нормали к окружности. Кроме этого, надо учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\rho \partial \varphi}.$$

Тогда легко из (1) получим (2). Отметим, что условия Коши—Римана в декартовых координатах

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

получаются из (1) при

$$s^0 = 1, \quad n^0 = i.$$

114. а)  $f(z) = \frac{1}{z}$ ; б)  $f(z) = \ln z$ ; в)  $f(z) = z^2 + 2z$ .

115. а)  $f(z) = 2 \operatorname{sh} z - z^2$ ; б)  $f(z) = 2 \sin z - z$ ; в)  $f(z) = 4 \operatorname{ch} z + z^2 - 1$ .

116. а)  $f(z) = 2 \cos 2z + z$ ; б)  $f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2$ .

118. а) да; б) нет; в) да; г) нет.

119.  $a+c=0$ .

120. а) нет; б) да; в) нет; г) да.

122.  $f(u) = c_1 u + c_2$ ;  $c_1$  и  $c_2 = \text{const}$ .

123. а) нет; б) да; в) да. У к а з а н и е. Показать, что функция  $\ln w$  аналитична в области  $D$ .

125. а) да; б) нет; в) нет. 126.  $u = c_1(ax + by) + c_2$ .

127.  $u = c_1 xy + c_2$ . 128.  $u = c_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c_2$ .

129.  $u = c_1(\sqrt{x^2 - y^2}) + c_2$ .

130.  $u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_2$ ,  $c_1$  и  $c_2$ —произвольные постоянные.

$$131. u = c_1 \frac{x}{x^2 + y^2} + c_2.$$

$$132. \text{ а) } r_1 = 2, \varphi_1 = \frac{\pi}{4}; r_2 = \frac{1}{e}; \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}; \text{ б) } r_1 = 1, \varphi_1 = 0; r_2 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 1}, \varphi_2 = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1); \text{ в) } r_1 = 15, \varphi_1 = -\operatorname{arctg} \frac{4}{3}; r_2 = 3 \left( 1 + \frac{\pi^2}{4} \right), \varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{4\pi}{\pi^2 - 4}.$$

133. а) Полуплоскость  $\operatorname{Re} z > 0$  растягивается, полуплоскость  $\operatorname{Re} z < 0$  сжимается.

б) В любой точке  $z$  (кроме  $z=0$ ), лежащей внутри окружности  $|z|=1$ , имеет место растяжение, а для точек, лежащих вне этой окружности, — сжатие.

в) То же, что и в п. б).

г) Часть комплексной плоскости, лежащая внутри окружности  $|z|=1/\sqrt{3}$ , сжимается; часть плоскости, лежащая вне этой окружности, — растягивается.

$$134. S_{\tilde{D}} = 8/3, l_w = 2(1 + \sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

$$135. S_{\tilde{D}} = \frac{x_2 - x_1}{4} (\operatorname{sh} 2y_2 - \operatorname{sh} 2y_1) - \frac{y_2 - y_1}{4} (\sin 2x_2 - \sin 2x_1).$$

$$136. 7,5\pi.$$

$$137. \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1).$$

138. Данный прямоугольник отображается в кольцо  $e \leq |w| \leq e^2$ , площадь которого равна  $\pi(e^4 - e^2)$ . По формуле (9) получаем  $4(e^4 - e^2)$ . Ошибка происходит из-за того, что при заданных условиях отображение не является взаимно однозначным.

$$139. 1/2. \quad 140. -\frac{\pi}{2}. \quad 141. \frac{1}{4}(e^2 - 1)(1 + i).$$

$$142. \text{ а) } 2\pi i; \text{ б) } -2\pi i. \quad 143. 0. \quad 144. 0. \quad 145. (i - 1)e^i.$$

$$146. \text{ а) } 2 + i; \text{ б) } 6 + 2i. \quad 147. -2(1 + i). \quad 148. -1. \quad 149. \frac{3}{5}(i - 1).$$

$$150. \text{ а) } e \cos 1 - 1 + ie \sin 1; \text{ б) } e \cos 1 - 1 + ie \sin 1.$$

$$151. -(1 + i \operatorname{sh} 1). \quad 152. \text{ а) } 2(i - 1); \text{ б) } 2\sqrt{2}i.$$

$$153. 2\sqrt{2} - 4 + i2\sqrt{2}. \quad 154. -7e^{-2} + (3 - 2i)e^i. \quad 155. e^{-1} - 1.$$

$$156. \cos 1 - \sin 1 - ie^{-1}. \quad 157. 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1).$$

$$158. -\frac{1}{8} \left( \frac{\pi^2}{4} + 3 \ln^2 2 \right) + i \frac{\pi}{8} \ln 2. \quad 159. -\frac{\pi^2}{8}.$$

$$160. \frac{1}{4} [1 - \cos(2 + 2i)]. \quad 61. -\left( \operatorname{tg} 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 1 + \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 1 \right) + i \operatorname{th} 1.$$

$$162. \sqrt{2} \operatorname{sh} 1 + i(\sqrt{2} \operatorname{sh} 1 - 2\sqrt{\sin 1}).$$

$$163. \left( \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2 + \frac{1}{2} \right) i. \quad 164. -\frac{4}{3}. \quad 165. 0.$$

$$166. -\ln \sqrt{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 1} + i \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1).$$

$$167. \pi i. \quad 168. \pi e^{-1}. \quad 169. \frac{\pi}{2} i. \quad 170. \pi \operatorname{sh} 1.$$

$$171. 0. \quad 172. \frac{2}{3} \pi \operatorname{ch} \pi \cdot i. \quad 173. 0. \quad 174. -\frac{\pi}{45} i.$$

175.  $\pi$ . 176. 0. 177.  $-\pi i$ . 178.  $2\pi i$ .

179.  $-\frac{\pi(\pi+2)\sqrt{2}}{8}i$ . 180. 0. 181.  $-\frac{\pi i}{27}$ . 182.  $-\frac{\pi^2}{2}\operatorname{sh} 1$ .

183.  $\pi^3 i$ . 184. 0. 185.  $-2\pi i$ . 186.  $-\frac{1+i}{2}e^i$ .

187. Расходится. 188. Сходится. 189. Сходится. 190. Сходится.  
191. Расходится. 192. Сходится абсолютно. 193. Сходится. 194. Расходится. 195. Сходится. 196. Расходится.

197.  $R=1$ . 198.  $R=1$ . 199.  $R=\sqrt{2}$ . 200.  $R=\infty$ .

201.  $R=1$ . 202.  $R=\infty$ . 203.  $R=1$ . 204.  $R=1$ .

205.  $R=1$ . 206.  $R=\infty$ . 207.  $R=1$ . 208.  $e^{-1}$ .

209. а) и б)  $R \geq \frac{r+r'-|r-r'|}{2}$ ; в)  $R \geq rr'$ ; г)  $R \leq \frac{r}{r'}$ .

210.  $-\sin 1 + 2(z+1)\cos 1 + \frac{2^2}{2!}(z+1)^2 \sin 1 - \frac{2^3}{3!}(z+1)^3 \cos 1 - \dots$ ,

$R=\infty$ .

211.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left(z + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \right]$ ,  $R=\infty$ .

212.  $\sqrt{e} \left[ 1 + \frac{1}{2}(2z-1) + \frac{1}{2!2^2}(2z-1)^2 + \frac{1}{3!2^3}(2z-1)^3 + \dots \right]$ ,

$R=\infty$ .

213.  $-\frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \frac{3^3}{5^3}(z+2)^3 + \dots \right]$ ,  $R = \frac{5}{3}$ .

214.  $-\frac{1}{5} - \frac{9}{25}z - \frac{41}{125}z^2 - \dots$ ,  $R=1$ .

215.  $-iz + z^3 + iz^5 - z^7 - \dots$ ,  $R=1$ .

216.  $1 + \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)$ ,  $R=\infty$ .

217.  $\frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \right)$ ,  $R=\infty$ .

218.  $\ln 2 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot 4} + \frac{z^3}{3 \cdot 8} + \dots \right)$ ,  $R=2$ .

219.  $\ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{5z^2}{2 \cdot 4} + \frac{7z^3}{3 \cdot 8} - \dots$ ,  $R=1$ .

220.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z + \frac{1}{3!2^3}z^3 + \frac{3}{5!2^5}z^5 + \dots$ ,  $R=\pi$ .

221.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z + \frac{1}{2!2^2}z^2 - \frac{1}{3!2^3}z^3 + \dots$ ,  $R = \sqrt{\ln^2(2 - \sqrt{3}) + \pi^2}$ .

222.  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2}z - \frac{4}{2!6^3}z^2 + \frac{1}{3!6^3}z^3 + \dots$ ,  $R = \sqrt{\ln^2 5 + \pi^2}$ .

223.  $\ln 2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2!2^2}z^2 - \frac{1}{4!2^3}z^4 + \dots$ ,  $R=\pi$ .

224.  $-\frac{1}{2!}z^2 - \frac{2}{4!}z^4 - \frac{16}{6!}z^6 + \dots$ ,  $R = \frac{\pi}{2}$ .

225.  $\ln 2 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{4 \cdot 4!} - \frac{1}{2 \cdot 6!}z^6 + \dots$ ,  $R=\pi$ .

226.  $e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\dots\right)$ ,  $R=1$ .

227.  $f(z)=\frac{1}{a-z}$ ,  $|z|<1$ . 229.  $|z|>1/\sqrt{2}$ .

230.  $|z|>2$ . 231.  $|z|>e^{-1}$ . 232.  $|z|>e$ . 233.  $|z+1|>1/4$ .

234.  $|z-2-i|>1/2$ . 235.  $|z+2i|>3$ . 236.  $|z+1-i|>1$ .

237.  $|z+1+i|<1$ . 238.  $|z-i|<2$ . 239.  $0<|z-2+i|<1$ .

240.  $2<|z|<4$ . 241. Расходится всюду. 242.  $1<|z|<2$ .

243.  $|z-i|>e$ . 244.  $1<|z|<2$ . 245.  $|z+1|>2$ .

246.  $0<|z-i|<2$ . 247.  $0<|z|<1$ . 248.  $0<|z-1|<1$ .

249. 1) Если  $|a|>|b|$ , то всюду расходится; 2) если  $|a|<|b|$ , то сходится в кольце  $|a|<|z|<|b|$ .

250.  $\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\dots$  251.  $\frac{2}{2!}z-\frac{8}{4!}z^3+\frac{32}{6!}z^5-\dots$

252.  $\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\dots$  253.  $\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\dots$

254.  $z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\dots$  255.  $z^4-\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!z^2}+\dots$

256.  $\frac{4^2}{2!2z^3}-\frac{4^4}{4!2z^5}+\frac{4^6}{6!2z^7}-\dots$  257.  $\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\frac{z^6}{8!}+\dots$

258.  $1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\dots$  259.  $\frac{2}{z^4}-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\dots$

260.  $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}-\frac{z}{4!}+\dots$  261.  $\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}$ .

262.  $\frac{\sin 2}{z-2}-\frac{\sin 2}{2!}(z-2)-\frac{\cos 2}{3!}(z-2)^2+$   
 $+\frac{\sin 2}{4!}(z-2)^3+\frac{\cos 2}{5!}(z-2)^4-\dots$

263.  $(1-i)+(z+i)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{i}{1!}\right)\frac{1}{z+i}+\left(\frac{1}{3!}-\frac{i}{2!}\right)\frac{1}{(z+i)^2}+\dots=$   
 $=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{i}{n!}\right](z+i)^{-n}$ .

264. а)  $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$ .

265. а)  $\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ ; б)  $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+2}}$ .

266. а) Не разлагается;

б)  $\frac{1}{5}\left(\frac{2^2+1}{z^3}-\frac{2^3+2}{z^4}+\frac{2^4-1}{z^5}-\frac{2^5-2}{z^6}+\dots\right)$ .

267.  $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$ .

$$268. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n - \frac{(-1)^n}{2^n} \right] z^{n-1}; \quad \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n;$$

$$\text{ в) } \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-2)^n}{z^{n+1}}.$$

$$269. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}. \quad 270. \text{ Не разлагается.}$$

$$271. \frac{1}{z-1} + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}. \quad 272. z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2) \cdot 4^{n+1}}{z^{2n+1}}.$$

$$273. -\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}}.$$

$$274. -\frac{l}{2(z-i)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} (z-i)^n. \quad 275. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}.$$

276. а)  $z=0$  — второго порядка,  $z_{1,2} = \pm 2i$  — простые; б)  $z_n = n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — простые.

277. а)  $z=0$  — третьего порядка,  $z_n = n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — простые. б)  $z=0$  — простой,  $z_n = n\pi i$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — второго порядка.

278. а)  $z_n = (2n+1)\pi i$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — второго порядка; б)  $z_n = (4n+1)\frac{\pi}{2}i$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — второго порядка.

279. а)  $z = -\pi i$  — второго порядка;  $z_n = n\pi i$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — простые; б)  $z_n = \sqrt[3]{(2n+1)} \frac{\pi}{2}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),

$$z_n = \sqrt[3]{(2n+1)} \frac{\pi}{2} \frac{1 \pm i \sqrt{3}}{2} - \text{простые.}$$

280. а)  $z_{1,2} = \pm \pi i$  — второго порядка; б) нулей нет.

281. Второго порядка. 282. Третьего порядка.

283. Простой нуль. 284. Четвертого порядка.

285. Первого порядка. 286. Второго порядка.

287. Четвертого порядка. 288. Пятнадцатого порядка.

289. а) Нулем, порядок которого не ниже чем  $\min(n, m)$ ; б) нулем порядка  $n+m$ ; в) нулем порядка  $n-m$ , если  $n > m$ ; правильной точкой, не являющейся нулем, если  $n = m$ ; особой точкой, если  $n < m$ .

290. а) Полюс третьего порядка; б) полюс четвертого порядка; в) полюс второго порядка.

291. а) Полюс простой; б) полюс второго порядка.

292. а)  $z_n = (4n+1)\frac{\pi}{2}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — полюсы второго порядка; б)  $z=0$  — устранимая особая точка.

293. а)  $z = -2$  — существенно особая точка; б)  $z = 0$  — существенно особая точка.

294. а)  $z = 0$  — полюс второго порядка,  $z = -1$  — полюс второго порядка; б)  $z = 0$  — полюс второго порядка,  $z = 2n\pi i$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — простые полюсы.

295. а)  $z = 0$  — существенно особая точка; б)  $z = -1$  — существенно особая точка; в)  $z = 0$  — существенно особая точка.

296. а)  $z = 0$  — устранимая особая точка;  $z = 2\pi k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — полюсы второго порядка; б)  $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — устранимые особые точки;  $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — простые полюсы; в)  $z = \pi$  — простой полюс;  $z = k\pi$  ( $k = 0, -1; \pm 2, \pm 3, \dots$ ) — полюсы второго порядка.

297. Устранимая особая точка. 298. Полюс простой.

299. Полюс простой. 300. Устранимая особая точка.

301. Существенно особая точка.

302.  $z = 0$  — полюс четвертого порядка,  $z = -1$  — полюс простой.

303. Устранимая особая точка. 304. Устранимая особая точка.

305. Полюс простой. 306. Устранимая особая точка.

307. Существенно особая точка. 308. 1. 309.  $-16/3$ .

310. 1. 311.  $-1$ . 312. 0. 313. 0.

314.  $\operatorname{res} f(0) = 0$ ,  $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}$ ,  $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{-8}{\pi^2(2n+1)(4n+1)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

315.  $\operatorname{res} f(0) = 1/24$ .

316.  $\operatorname{res} f(-i) = -\frac{1+3i}{20} \cos 1$ ,  $\operatorname{res} f(i) = -\frac{1-3i}{20} \cos 1$ ,  $\operatorname{res} f(3) = \frac{\operatorname{ch} 3}{10}$ .

317.  $\operatorname{res} f\left[(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right] = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\pi/6 + 2n\pi}, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\pi/6 + (2n-1)\pi}, \end{cases}$

$\operatorname{res} f\left[(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n\right] = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\pi/6 + 2n\pi}, \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\pi/6 + (2n-1)\pi} \end{cases}$

( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

318.  $\operatorname{res} f(0) = -\frac{5}{2}$ ,  $\operatorname{res} f(1) = e$ . 319.  $\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{27}$ ,  $\operatorname{res} f(2) = -\frac{1}{27}$ .

320.  $\operatorname{res} f(0) = 0$ ,  $\operatorname{res} f(z_1) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} e^i$ ,  $\operatorname{res} f(z_2) = \frac{(1-i)e^{-i}}{4\sqrt{2}}$ ,  $\operatorname{res} f(z_3) = \frac{(1+i)e^i}{4\sqrt{2}}$ ,  $\operatorname{res} f(z_4) = -\frac{(1-i)e^{-i}}{4\sqrt{2}}$ , где  $z_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) — корни уравнения  $z^4 + 1 = 0$ .

321.  $\operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}$ . 322.  $\operatorname{res} f(0) = 0$ .
323.  $\operatorname{res} f(-i) = \frac{4}{9} \operatorname{sh} 2 \cdot i$ ,  $\operatorname{res} f\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{4}{9} (e + 2e^{-1}) i$ .
324.  $\operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}$ ,  $\operatorname{res} f(3) = \frac{2}{27} \sin^2\left(\frac{3}{2}\right)$ .
325.  $\operatorname{res} f(0) = 0$ .
326.  $\operatorname{res} f(-3) = \frac{1}{8} e^{-3i}$ ,  $\operatorname{res} f(-1) = -\frac{e^{-i}}{4}$ ,  $\operatorname{res} f(1) = \frac{e^i}{8}$ .
327.  $\operatorname{res} f(0) = -\frac{4}{\pi^2}$ ,  $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . 328.  $\operatorname{res} f(i) = -1$ .
329.  $\operatorname{res} f(1) = \frac{2n(2n-1)(2n-2) \dots [2n-(n-2)]}{(n-1)!}$ .
330.  $\operatorname{res} f(n\pi) = 0$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).
331.  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!(2n)!}$  в точке  $z=0$ .
332.  $e$  в точке  $z=1$ .
333.  $\sin 1$  в точке  $z=0$ ;  $-\sin 1$  в точке  $z=1$ .
334.  $1-e^{-1}$  в точке  $z=0$ ;  $e^{-1}$  в точке  $z=-1$ .
335.  $e^{-1}-1$  в точке  $z=0$ .
336.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}$  в точке  $z=0$ .
337. 0. 338. 0. 339.  $(1-2e^{-1})\pi i$ . 340.  $2(1-e^{-1})\pi i$ .
- 3.1.  $-\frac{1}{3}\pi i$ . 342. 0. 343.  $-\frac{4}{3}\ln 3 \cdot \pi i$ . 344.  $2\pi i$ .
345.  $[\cos 1 + \sin 1 + i(\sin 1 - \cos 1)] \frac{\pi}{2}$ . 346.  $\pi i$ .
347. 0. 348.  $2\pi i \frac{e^2}{3}$ . 349.  $-\pi^2 i$ . 350.  $2\pi i$ .
351.  $\frac{\sin 1 - 4 \cos 1}{12} \pi i$ . 352.  $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$ . 353. 0. 354.  $3\pi i$ . 355. 0.
356.  $z=\infty$  — простой полюс.
357.  $z=\infty$  — устранимая особая точка.
358.  $z=\infty$  — существенно особая точка.
359.  $z=\infty$  — устранимая особая точка.
360.  $z=\infty$  — устранимая особая точка.
361.  $z=\infty$  — полюс третьего порядка.
363.  $2\pi i$ . 364. 0. 365. 0. 366.  $2\pi e i$ .
367.  $-\frac{\pi}{3} i$ . 368.  $2\pi i$ . 369.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ . 370.  $\frac{\pi}{ab(a+b)}$ .
371.  $\frac{3}{8} \pi$ . 372.  $\frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n} \pi$ . 373.  $-\frac{\pi}{27}$ .
374.  $\frac{\pi}{2(b^2-a^2)^3} \left( \frac{5b^2-a^2}{b^3} + \frac{b^2-5a^2}{a^3} \right)$ . 375.  $\frac{2}{3} \pi$ .

376.  $\frac{\pi}{n \sin \frac{2m+1}{n} \pi}$ . 377.  $\frac{2}{3} \pi$ . 378.  $\frac{\pi}{2}$ . 379.  $\frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}$ .
381.  $\frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \sin 1)$ . 382.  $\frac{\pi}{2} e^{-4} (2 \cos 2 + \sin 2)$ .
383.  $\frac{\pi}{12} e^{-2} (2e - 1)$ . 384.  $\frac{\pi}{3} e^{-3}$ .
385.  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-a/\sqrt{2}} \left( \cos \frac{a}{\sqrt{2}} + \sin \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$ . 386.  $\frac{\pi}{2a} e^{-a}$ .
387.  $\frac{\pi}{2a} e^{-ma}$ . 388.  $\frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin \frac{1}{2}$ . 389.  $\frac{\pi}{16} \left( e^{-\lambda} - \frac{1}{3} e^{-3\lambda} \right)$ .
390.  $\frac{\pi}{4} (2-a) e^{-a}$ . 391. 0.
392.  $\frac{\pi}{4b^3} e^{-bm} [3b^2 - a^2 - mb(3b^2 + a^2)]$ . 393.  $\frac{\pi}{2}$ .
394.  $\frac{\pi}{2} (1 - e^{-1})$ . 395.  $\frac{b-a}{2} \pi$ . 396.  $\frac{\pi}{2a^4} - \frac{\pi e^{-ma}}{4a^3} \left( m + \frac{2}{a} \right)$ .
397.  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$ . 398.  $\pi \left( \frac{1}{\sin a\pi} - \frac{1}{\sin b\pi} \right)$ . 399.  $\frac{2\pi}{1-\rho^2}$ .
400.  $\frac{\pi(1-\rho+\rho^2)}{1-\rho}$ . 401.  $\frac{2\pi}{\rho^2(\rho^2-1)}$ . 402. 0.
403.  $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ . 404.  $\pi i$ . 405.  $\frac{2\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2-b^2})$ . 406.  $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ .
407.  $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ . 408.  $\frac{1-\pi a \operatorname{ctg} \pi a}{2a^2}$ .
409.  $\frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3} (\operatorname{ctg} \pi a + \operatorname{cth} \pi a)$ . 410.  $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$ .
411.  $\frac{\pi^2}{8}$ . 412.  $\frac{\pi^2 \operatorname{ctg} \pi a}{\sin \pi a}$ . 413.  $\frac{\pi^3}{32}$ .
414.  $\frac{\pi \operatorname{ch} \alpha a}{2a \operatorname{sh} \pi a} + \frac{1}{2a^2}$ . 415.  $\frac{1}{4a^4} \left( \frac{\pi^2 a^2 \operatorname{ch} \pi a}{\operatorname{sh}^2 \pi a} + \frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a} - 2 \right)$ .
416.  $\operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$
417.  $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 3 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$
418. а)  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -1, \quad \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$
- б)  $\operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .
419. -2. 420. 3. 421. 6. 422. -1. 423. -3. 424. -4.  
 425. 2. 426. 1. 427. 1. 428. 1. 429. 2. 430. 6.  
 431. 3. 432. Нет. 433. 5. 434. Нет. 435. 11. 436. 6.  
 437. 2. 438. 3. 439. 4. 440. 1. 441. n. 442. 2.



443. 4. 444. Нет. 445. 1. 446. 1.

450. а) Вся плоскость; б) вся плоскость, кроме точки  $z=2$ ; в) вся плоскость, кроме точки  $z=0$ ; г) вся плоскость, кроме точек  $z_k = 1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  д) вся плоскость, кроме точки  $z = -2i$ .

454. а) и б) — параллельный перенос; в), г) и е) — поворот; д) — растяжение.

455. а)  $w = az + b$ ; б)  $w = -az + b$ ; в)  $w = -i(az + b)$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа,  $a > 0$ .

456. а)  $w = -\frac{1+8i}{5}z + \frac{14+2i}{5}$ ; б)  $w = 2z + i$ ; в)  $w = iz - 2$ .

457.  $w = \frac{z-a}{h}$ .

458. У к а з а н и е. Полагая  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , получим

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Обходя границу полуполосы, например, так, что область остается слева, в силу принципа соответствия границ находим, что образом полуполосы будет четвертый квадрант с выброшенным полукругом

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

459. а)  $\arg w = -\frac{\pi}{3}$ ; б)  $|w| = 1$ ,  $-\pi < \arg w < -\frac{\pi}{4}$ ; в)  $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{2}$ ,  $v = 0$ ; г)  $\frac{1}{2} < v < 1$ ,  $u = 0$ ; д)  $\left|w - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ ,  $u > 0$ .

460.  $w = \frac{z-i}{iz-i}$ . 461.  $\left|w - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{3}$ ,  $u < \frac{3}{4}$ .

462.  $\operatorname{Re} w > 0$ . 463.  $u < v$ . 464.  $u + v < 0$ .

465. а)  $-1 + i$ ; б)  $1 + i$ ; в)  $\infty$ .

466. а)  $w = -az + b$ ; б)  $w = -i(az + b)$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа,  $a > 0$ .

467.  $w = \frac{2}{2-z}$ . 468. а)  $w = \frac{z-i}{z+i}$ ; б)  $w = i\frac{z-2i}{z+2i}$ .

469.  $w = \frac{z-i}{iz-1}$ . 470.  $w = \frac{i-1-(1+i)z}{(3i-1)z-1-3i}$ .

471.  $w = i\frac{1-z}{1+z}$ . Воспользоваться формулой (7).

472.  $w = \frac{2z-5}{10-z}$ . Воспользоваться формулой (7).

473. Р е ш е н и е. Воспользоваться формулой  $w = e^{i\varphi} \frac{z-z_0}{1-zz_0}$ , где

$z_0$  — точка первого круга, переходящая в центр второго. В случае а) имеем  $r\left(\frac{1}{2}\right) = \vartheta$ , т. е.  $z_0 = \frac{1}{2}$ . Используя условие  $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ,

получим  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Итак,  $\omega = i \frac{2z-1}{2-z}$ . В случае б) аналогично получим  $\omega = -iz$ .

$$474. \omega = \frac{5-z + \sqrt{5}(i-1)(z+1)}{5-z + \sqrt{5}(i+1)(z+1)}.$$

475. Первый квадрант плоскости  $\omega$ .

476. Область  $\frac{1}{2} \leq |\omega-1| \leq 1$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(\omega-1) \leq 0$ .

$$477. \omega = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}. \quad 478. \omega = \sqrt{e^{2\pi zi} + e^{-2\pi ia}}.$$

$$479. \omega = \sqrt{\frac{z-b}{z-a}}. \quad 480. \omega = \left(\frac{z-i}{iz-1}\right)^2.$$

У к а з а н и е. Сначала отобразить круг на верхнюю полуплоскость, а затем преобразовать ее в плоскость с разрезом.

$$481. \omega = [(z-z_0)e^{-i\varphi_1}]^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}.$$

$$482. \omega = -e^{-z}. \quad 483. \omega = \left(\frac{e^{-z}-1}{e^{-z}+1}\right)^2.$$

484. На прямоугольник  $\{\ln r \leq u \leq \ln R, 0 \leq v \leq \pi\}$ .

$$485. \omega_1 = ze^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad \omega = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{ze^{-i\frac{\pi}{4}}} \quad (\sqrt{1}=1).$$

$$486. \omega_1 = \frac{z-a}{b-z}, \quad \omega = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{\frac{z-a}{b-z}}.$$

$$487. \omega_1 = z-a, \quad \omega_2 = \frac{\omega_1}{\omega_1-(b-a)}, \quad \omega = \sqrt{\omega_2} = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}.$$

488.  $\omega_1 = z^2$ , тогда  $\omega_1|_{z-1+i} = 2i$ . Согласно формуле (9)  $\omega = e^{i\varphi} \times \frac{\omega_1-2i}{\omega_1+2i} = e^{i\varphi} \frac{z^2-2i}{z^2+2i}$ . Из условия  $\omega(0) = 1$  находим, что  $e^{i\varphi} = -1$ .

Окончательно  $\omega = \frac{2i-z^2}{2i+z^2}$ .

489. Верхний полукруг  $|\omega-1| < 1$ ,  $\operatorname{Im} \omega > 0$ .

490. Четверть круга  $|\omega| < 1$ ,  $0 < \arg \omega < \frac{\pi}{2}$ .

491. Прямоугольник с вершинами в точках 1, 2,  $2+ie$ ,  $1+ie$ .

$$492. \omega_1 = z^4, \quad \omega_2 = \frac{16+\omega_1}{16-\omega_1}, \quad \omega = \omega_2^2 = \left(\frac{16+z^4}{16-z^4}\right)^2.$$

$$493. \omega_1 = z-a, \quad \omega_2 = \frac{\pi i}{b-a} \omega_1, \quad \omega = e^{\omega_2} = e^{\frac{\pi i(z-a)}{b-a}}.$$

494.  $\omega = \ln z$ .

$$495. \omega_1 = e^{-z}, \quad \omega_2 = -\omega_1, \quad \omega_3 = \frac{\omega_2+1}{1-\omega_2}, \quad \omega = \omega_3^2 = \left(\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\right)^2.$$

$$496. \omega_1 = 2iz, \quad \omega_2 = \omega_1 + \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \sin \omega_2 = \sin\left(2iz + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ch} 2z.$$

$$497. \omega = 2 \cdot \frac{z-2}{z}. \quad 498. \omega = 2i \frac{z+2}{z}.$$

$$499. \omega = \left( \frac{z}{z-1+i} \right)^2. \quad 500. \omega = 2 \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

$$501. \omega_1 = 2z, \omega_2 = \frac{1}{2} \left( \omega_1 + \frac{1}{\omega_1} \right), \omega = \frac{\omega_2 - i}{\omega_2 + i} = \frac{4z^2 - 4iz + 1}{4z^2 + 4iz + 1}.$$

$$502. \omega = -\frac{z^8 - i}{z^8 + i}. \quad 503. \omega = e^{i2z}.$$

504. а) единичный круг  $|\omega| < 1$ ; б) вся плоскость  $\omega$  с разрезом вдоль отрезка  $u=0, -1 \leq v \leq 1$ .

505. Потенциал скоростей  $u = x^2 - y^2 + 2x + 2$ ; функция тока  $v = 2(x+1)y$ ; линии уровня  $x^2 - y^2 + 2x = c_1$  — гиперболы; линии тока  $xy + y = c_2$  — гиперболы; величина скорости  $V = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ ; направление скорости

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x+1} + m\pi, \quad m = -1, 0, 1$$

(см. формулу (1) на стр. 7); проекции скорости на оси  $Ox$  и  $Oy$ :  $V_{Ox} = 2(x+1)$ ,  $V_{Oy} = -2y$ .

506. Потенциал скоростей  $u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ; функция тока  $v = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ ; линии уровня  $x^2 - y^2 = c_1(x^2 + y^2)^2$ ; линии тока  $xy = c_2(x^2 + y^2)^2$ ; величина скорости  $V = \frac{2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ; направление скорости

$$\varphi = 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (3m-1)\pi, \quad m = -1, 0, 1;$$

проекция скорости на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$V_{Ox} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad V_{Oy} = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

507. Потенциал скоростей  $u = \frac{1}{2} \ln [(x-1)^2 + y^2]$ ; функция тока  $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-1}$ ; линии уровня  $(x-1)^2 + y^2 = c_1$  — окружности; линии тока  $y = c_2(x-1)$  — прямые; величина скорости  $V = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$ ; направление скорости

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-1} + m\pi, \quad m = -1, 0, 1;$$

проекция скорости на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$V_{Ox} = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, \quad V_{Oy} = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

$$508. f(z) = (1-i)z^2 + z. \quad 509. f(z) = \sin z + c.$$

510.  $\Gamma_L = -10\pi$  по обеим окружностям.

511. а) да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) нет; ж) нет; з) да; и) нет; к) да; л) да; м) да.

$$512. \frac{1}{p^2}. \quad 513. \frac{3}{p^2+9}. \quad 514. \frac{1}{(p-1)^2}. \quad 515. \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

$$516. \text{Нет.} \quad 517. \frac{p+1}{p^2}. \quad 518. \frac{2-p}{p^2+1}. \quad 519. \frac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}.$$

$$520. \frac{1}{p-a}. \quad 521. \frac{4}{p^2+16}. \quad 522. \text{а) } \frac{p}{p^2+\omega^2}; \quad \text{б) } \frac{3}{p^2-9}.$$

$$523. aF(pa). \quad 524. \frac{2}{p(p^2+4)}. \quad 525. \frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}.$$

$$526. \frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}. \quad 527. \frac{2mnp}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}.$$

$$528. \frac{1}{8} \left( \frac{3}{p} + \frac{p}{p^2+16} - \frac{4p}{p^2+1} \right). \quad 529. \frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}.$$

$$530. \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}. \quad 531. \frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}. \quad 532. \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

$$533. \frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}. \quad 534. \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}. \quad 535. \frac{1}{(p-1)^2}.$$

$$536. \frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}. \quad 537. \frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}. \quad 538. \frac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}.$$

$$539. \frac{6p}{(p^2-1)^2}. \quad 540. \frac{1}{p(p^2+1)}. \quad 541. \frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}.$$

$$542. \frac{4}{(p^2-4)^2}. \quad 543. \frac{p^2+2\omega^2}{p^2(p^2+4\omega^2)}. \quad 544. \frac{1}{p^2-\omega^2}. \quad 545. \frac{2}{p(p+1)^3}.$$

$$546. \text{а) } \ln \frac{p}{p-1}; \quad \text{б) } \ln \frac{p+1}{p}; \quad \text{в) } \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p^2+4}}{p}.$$

$$547. \text{а) } \ln \frac{\sqrt{p^2+1}}{p}; \quad \text{б) } \frac{1}{2} \ln \frac{p^2+4}{p^2+1}.$$

$$548. \text{а) } \ln \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p}; \quad \text{б) } \ln \frac{p+1}{p-1}.$$

$$549. \ln \frac{b}{a}. \quad 550. \operatorname{arctg} \frac{a}{\alpha}. \quad 551. \operatorname{arctg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m}.$$

$$552. A \ln \frac{\delta}{\alpha} + B \ln \frac{\delta}{\beta} + C \ln \frac{\delta}{\gamma}. \quad 553. \ln \frac{b}{a}.$$

$$554. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|. \quad 555. \text{а) } \frac{1}{(p-2)^2+1}; \quad \text{б) } \frac{p-m}{(p-m)^2+n^2}.$$

$$556. \frac{3!}{(p+1)^4}. \quad 557. \frac{1}{(p-1)^2-1}. \quad 558. \frac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}.$$

$$559. \frac{1}{2(p-3)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+4}.$$

$$560. \frac{1}{2(p+\alpha)} + \frac{p+\alpha}{2[(p+\alpha)^2+4\beta^2]}.$$

$$561. \frac{e^{-bp}}{p^2+1}. \quad 562. \frac{e^{-bp}}{2p} + \frac{pe^{-bp}}{2(p^2+4)}. \quad 563. \frac{e^{-2p}}{p-1}.$$

$$564. \frac{1-e^{-p}}{p}. \quad 565. \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}. \quad 566. \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}.$$

$$567. \frac{e^{-ap}}{p+b}. \quad 568. \frac{be^{-ap}}{p(p+b)}. \quad 569. \frac{1-e^{-ap}}{p^2}.$$

$$570. \frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}. \quad 571. \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{e^{kp}}.$$

$$572. F(p) = \frac{1}{ap^2} (2e^{-2ap}-1) + \frac{2}{p} e^{-ap}.$$

$$573. F(p) = \frac{e^{-ap}}{p} (2 - e^{-ap} - e^{-2ap}).$$

$$574. F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{ap^2} + \frac{ap-2}{ap^2} e^{-ap} + \frac{1}{ap^2} e^{-2ap}.$$

$$575. F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1-2ap}{ap^2} e^{-ap} - \frac{1}{ap^2} e^{-2ap}.$$

$$576. F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{ap^2} e^{-ap} + \frac{2}{ap^2} e^{-3ap}.$$

$$577. F(p) = -\frac{b}{p} e^{-ap} + \frac{2b}{p} e^{-2ap}. \quad 579. F(p) = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}.$$

$$580. \frac{1+p-e^{-p}}{p^2(e^p-1)}. \quad 581. \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}.$$

$$582. \frac{1}{p^2+1} \left( p + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{1-e^{-\pi p}} \right). \quad 583. \frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}.$$

$$587. \text{ а) } \frac{2e^{-\frac{\pi}{8}p}}{p^2+4}; \quad \text{ б) } \frac{pe^{-\frac{\pi}{18}p}}{p^2+9}; \quad \text{ в) } \frac{3e^{-2p}}{p^2-9}.$$

$$588. \sum_{k=0}^n m_k e^{-kp}. \quad 589. \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

$$590. \frac{p}{(p-2)(p^2+1)}. \quad 591. \frac{2}{p^2(p^2-1)}. \quad 592. \frac{n! F(p)}{p^{n+1}}. \quad 593. \frac{2}{p^3(p+2)}.$$

595. Решение. Известно, что  $J_1(t) = -J'_0(t)$ . Используя результаты предыдущей задачи и теорему о дифференцировании оригинала, находим

$$J_1(t) \stackrel{+}{=} -p \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + J_0(0) = -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

596. Решение. При  $n=0$  и  $n=1$  формула

$$J_n(t) \doteq \frac{(\sqrt{\rho^2+1}-\rho)^n}{\sqrt{\rho^2+1}}$$

верна. Применим метод математической индукции. Так как

$$2J'_n(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \quad \text{и} \quad J_{n-1}(0) = 0 \quad (n \geq 2),$$

то

$$\begin{aligned} J_n(t) &= J_{n-2}(t) - 2J'_{n-1}(t) \doteq \\ &\doteq \frac{(\sqrt{\rho^2+1}-\rho)^{n-2}}{\sqrt{\rho^2+1}} - \frac{2\rho(\sqrt{\rho^2+1}-\rho)^{n-1}}{\sqrt{\rho^2+1}} = \frac{(\sqrt{\rho^2+1}-\rho)^n}{\sqrt{\rho^2+1}}. \end{aligned}$$

597. Решение. Рассмотрим функцию

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho^{n+1}} e^{-\frac{1}{\rho}} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Имеем

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \rho^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \rho^{n+k+1}}.$$

Следовательно,  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{n+k}}{k! (n+k)!}$ . Замечая, что

$$J_n(2\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\frac{n}{2}+k}}{k! (n+k)!},$$

получаем  $f(t) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{t})$ .

В частности, при  $n=0$  имеем  $J_0(2\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{\rho} e^{-1/\rho}$ .

599. Положим  $\varphi(t) = t^n e^{-t}$ . По теореме смещения

$$t^n e^{-t} \doteq \frac{n!}{(\rho+1)^{n+1}}.$$

Нетрудно проверить, что  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$ . Согласно теореме о дифференцировании оригиналов

$$\frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \doteq \frac{\rho^n \cdot n!}{(\rho+1)^{n+1}}.$$

Используя теорему смещения, находим

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \doteq \frac{(\rho-1)^n \cdot n!}{n! \rho^{n+1}} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

600.  $-\frac{\ln \rho}{\rho} - \frac{C}{\rho}$ , где  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$  — постоянная Эйлера (см. [15]).

**601.** Решение. Рассмотрим функцию  $f(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})$ , и пусть  $F(p)$  есть изображение  $f(t)$ . Имеем  $(\operatorname{erf} t)' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ ,

$$f'(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = f(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \quad (1)$$

Переходя к изображениям и учитывая, что  $f(0) = 0$ , из (1) найдем  $pF(p) = F(p) + \frac{1}{\sqrt{p}}$ , откуда  $F(p) = \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$ . Здесь мы использовали результат задачи 515 и то, что  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . Итак,

$$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

Применяя теорему смещения, окончательно находим

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

**607.** а)  $\frac{\pi}{2} e^{-t}$ ; б)  $\frac{\pi}{2} \eta(t-1)$ .

**608.**  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ .

**609.**  $(t-1)^2 \eta(t-1)$ . **610.**  $(t-2) \eta(t-2)$ .

**611.**  $e^{t-2} \eta(t-2)$ . **612.**  $e^{-3(t-3)} \eta(t-3)$ . **613.**  $e^{-2t} \sin t$ .

**614.**  $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3})$ . **615.**  $(1-t)e^{-t}$ . **616.**  $\frac{1}{2} t \sin t$ .

**617.**  $1 - e^{-t} - te^{-t}$ . **618.**  $\frac{2\sqrt{3}}{9} e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} t$ . **619.**  $\frac{t^2}{2} + 2e^{-t} \sin t$ .

**620.**  $t - \sin t$ . **621.**  $\frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{15} e^{-t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t$ .

**622.**  $1 - ne^{-t} + \frac{1}{2} n(n-1)e^{-2t} - \dots + (-1)^n e^{-nt}$ .

**623.**  $\frac{2}{3} e^{-t/2} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - t \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right]$ . **624.**  $e^{-t} (1 - t^2)$ .

**625.**  $\frac{1}{3} e^{t/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \frac{1}{3} e^{-t}$ .

**626.**  $\frac{3}{5} + \frac{e^{-2t}}{5} (4 \sin t - 3 \cos t)$ . **627.**  $\frac{1}{9} (e^{-2t} - e^t + 3te^t)$ .

**628.**  $2e^t + e^{t/2} \left( \frac{5\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$ .

**629.**  $\frac{1}{3} te^t - \frac{1}{3} te^{-t/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$ .

**630.**  $\frac{1}{2} e^{t-1} \sin 2(t-1) \eta(t-1) + \cos 3(t-2) \eta(t-2)$ .

631.  $(t-3)e^{-t-3}\eta(t-3)$ . 632.  $e^{t-1}\eta(t-1) - \eta(t-1)$ .  
 633.  $\sin(t-2)\eta(t-2) + 2\sin(t-3)\eta(t-3) + 3\sin(t-4)\eta(t-4)$ .  
 634.  $\text{sh}(t-1)\eta(t-1) + \text{ch}2(t-2)\eta(t-2)$ .

$$635. \frac{1}{4}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{5}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right) - \\ - \frac{1}{20}\cos 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{10}\sin 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right).$$

636.  $(t-1)\eta(t-1) + (t-2)^2\eta(t-2) + (t-3)^3\eta(t-3)$ .

637.  $\eta\left(t-\frac{1}{3}\right) - \cos\left(t-\frac{1}{3}\right)\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)$ . 638.  $1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ .

639. Решение.  $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$ . Полагаем  $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ ,

$F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$ . Отсюда  $F(p) = \frac{e^{-ap}}{p^2}$ , и по теореме запаздывания

$$F(p) \doteq (t-a)\eta(t-a) = f(t).$$

По теореме Эфроса

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (\tau-a)\eta(t-a)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty (\tau-a)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau - \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau = I_1(t) + I_2(t).$$

Здесь

$$I_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} (-2t)e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \Big|_{\tau=a}^\infty = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

$$I_2(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau = \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau - \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau = \\ = a \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2}ds \right), \text{ где } s = \frac{\tau}{2\sqrt{t}}.$$

Следовательно,  $I_2(t) = a \left[ \text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) - 1 \right] = -a \text{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$  и окончательно

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} \doteq 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4t}} - a \text{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$



$$640. \left(t + \frac{\alpha^2}{2}\right) \operatorname{Erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \alpha \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}.$$

$$641. ae^{hx+a^2h^2t} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right).$$

$$642. \text{Решение. } \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}. \text{ Полагаем}$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}.$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p(a+p)} = \frac{1}{a} \left( \frac{e^{-\alpha p}}{p} - \frac{e^{-\alpha p}}{p+a} \right) \stackrel{+}{=} \\ \stackrel{+}{=} \frac{1}{a} [\eta(t-\alpha) - e^{-a(t-\alpha)} \eta(t-\alpha)] = f(t).$$

По теореме Эфроса имеем

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})} \stackrel{+}{=} \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} [1 - e^{-a(\tau-\alpha)}] e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \\ = \frac{1}{a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds - \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\left[\alpha - \alpha a + \frac{\tau^2}{4t}\right]} d\tau = \\ = \frac{1}{a} \operatorname{Erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{a\alpha + a^2 t} e^{-\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}\right)^2} d\tau = \\ = \frac{1}{a} \operatorname{Erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{e^{a(at+\alpha)}}{a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

$$\text{где } z = \frac{\tau}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}.$$

Итак,

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})} \stackrel{+}{=} \frac{1}{a} \operatorname{Erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{e^{a(at+\alpha)}}{a} \operatorname{Erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}\right).$$

$$643. \text{Решение. } I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \operatorname{ch} \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau. \text{ Сравнивая } I(t) \\ \text{с формулой (19), стр. 172, видим, что } f(t) = \operatorname{ch} t, \text{ а значит, } F(p) =$$

$= \frac{p}{p^2 - 1}$ . Следовательно,  $F(\sqrt{p}) = \frac{\sqrt{p}}{p-1}$ . Взяв  $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ , полу-

чим  $\Phi(p) F(\sqrt{p}) = \frac{1}{p-1} \doteq I(t)$ , откуда  $I(t) = e^t$ .

$$644. I(t) = e^{-t}. \quad 645. I(t) = 2te^t. \quad 646. I(t) = 2te^{-t}.$$

$$647. x(t) = (t+1)e^{-t}. \quad 648. x(t) = -1.$$

$$649. x(t) = \frac{e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t}{5}. \quad 650. x(t) = t + \frac{1}{2} t^2.$$

$$651. x(t) \doteq t. \quad 652. x(t) = \cos t.$$

$$653. x(t) = \frac{1}{4} e^t + \frac{5}{12} e^{-3t} - \frac{2}{3}.$$

$$654. x(t) = \frac{1}{4} (1 - e^{2t} + 2te^{2t}).$$

$$655. x(t) = \frac{1}{8} (3e^t - e^{-3t} - 2e^{-t}). \quad 656. x(t) = t - \sin t.$$

$$657. x(t) = \frac{2}{25} e^{-2t} - \frac{2}{25} \cos t + \frac{14}{25} \sin t - \frac{1}{5} t \sin t - \frac{2}{5} t \cos t.$$

$$658. x(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} - te^{-t} - \cos t).$$

$$659. x(t) = \frac{1}{2} e^t - t - 1 + \frac{1}{2} (\cos t + \sin t).$$

$$660. x(t) = \frac{1}{2} t^2 - 1 + \cos t - \sin t. \quad 661. x(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t + te^t.$$

$$662. x(t) = \frac{3}{5} e^{-t} \sin 2t - \frac{4}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{5}.$$

$$663. x(t) = \frac{1}{2} (1 - e^t \cos t + e^t \sin t).$$

$$664. x(t) = 2 + \frac{1}{2} (e^{-t} - \cos t + \sin t).$$

$$665. x(t) = t^2 - 4t + 6 - 5e^{-t} - te^{-t}.$$

$$666. x(t) = 2t + \frac{1}{2} (e^{-t} + \cos t - \sin t).$$

$$667. x(t) = \frac{1}{2} t \sin t - \cos t + \sin t.$$

$$668. x(t) = \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + 2t - 4 + e^{-t}.$$

$$669. x(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{5} e^{-t} \sin 2t.$$

$$670. x(t) = \frac{1}{2} (\cos t + \operatorname{ch} t) - t - 1.$$

$$671. x(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t). \quad 672. x(t) = 1 - 2 \cos t.$$

$$673. x(t) = \frac{1}{4} t + \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t.$$

$$674. x(t) = \frac{3}{25} - \frac{t}{5} - \frac{3}{25} e^t \cos 2t + \frac{4}{25} e^t \sin 2t.$$

$$675. x(t) = e^{-t} - e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

$$676. x(t) = -1 - \frac{1}{2} (\sin t + \cos t + e^{-t}).$$

$$677. x(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t - 1.$$

$$678. x(t) = \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} t^2 - 1. \quad 679. x(t) = 2 + \frac{1}{2} (e^t + \sin t - \cos t).$$

$$680. x(t) = e^t \left( 1 - t + \frac{1}{2} t^2 \right) - 1. \quad 681. x(t) = -\frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t.$$

$$682. x(t) = 2e^{-t} + te^{-t} + t - 2.$$

$$683. x(t) = \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{t/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - 3\sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right).$$

$$684. x(t) = -\frac{1}{4} e^t - \frac{3}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} \sin t.$$

$$685. x(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{5}{6} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

$$686. x(t) = \cos t - t \cos t.$$

$$687. x(t) = 2 + t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} te^t - \frac{3}{2} e^t.$$

$$688. x(t) = 1 - \frac{22}{25} e^{-t} - \frac{6}{5} te^{-t} - \frac{3}{25} \cos 2t + \frac{4}{25} \sin 2t.$$

$$689. x(t) = \frac{t}{4} \sin 2t + \frac{1}{12} (\cos 2t - \cos 4t).$$

$$690. x(t) = \frac{1}{2} (t-1) e^t + \frac{1}{2} \cos t + 2 \sin t - 2t \cos t.$$

$$691. x(t) = e^t \left( \frac{t^2}{2} - t + 1 \right).$$

$$692. x(t) = 2t - 3 + 3e^{-t} - \frac{1}{5} (\sin 2t - 2 \cos 2t + 2e^{-t}).$$

$$693. x(t) = 4t + 3 - 2e^t. \quad 694. x(t) = e^{2t} - e^t - te^t.$$

$$695. x(t) = 3e^t - 3 - 2t - t^2 - \frac{t^3}{3}.$$

$$696. x(t) = \frac{1}{4} e^t \left( t^2 - 3t + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{3} e^{\frac{t}{2}} \left( \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \frac{1}{24} e^{-t}.$$

$$697. x(t) = \frac{4}{9} \sin 2t - \frac{5}{9} \sin t - \frac{1}{3} t \cos 2t.$$

$$698. x(t) = \frac{a}{2n^2} [\sin nt \cos \alpha - nt \cos (nt + \alpha)].$$

$$699. x(t) = \frac{1}{6} t^2 - \frac{4}{9} t + \frac{35}{54} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{4}{27} e^{-3t}.$$

$$700. x(t) = -\frac{t}{24} [3t \cos t + (t^2 - 3) \sin t].$$

$$701. x(t) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t. \quad 702. x(t) = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t.$$

$$703. x(t) = \frac{1}{10} e^{2t} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t.$$

$$704. x(t) = \frac{\gamma}{2} t^2 + (1 - \gamma) t + (\gamma - 1) + \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) e^{-t} + \frac{1}{2} (\cos t - \sin t).$$

$$705. x(t) = \frac{83}{80} \operatorname{ch} 2t - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{16} \cos 2t.$$

$$706. x(t) = e^t \left( \cos t + \sin t - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

$$707. x(t) = \frac{1}{3} e^{-t/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \frac{1}{3} (t - 1) e^t.$$

$$708. x(t) = \frac{1}{4} (t^2 \sin t + t \cos t - \sin t).$$

$$709. x(t) = \frac{2}{9} [e^t - e^{-2t} (3t + 1)].$$

$$710. x(t) = 1 - e^{-t} \left( \frac{t^2}{2} + t + 1 \right).$$

$$711. x(t) = 1 - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

$$712. x(t) = \frac{2a}{\omega^2} \left[ \sin^2 \frac{\omega t}{2} \eta(t) - \sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2} \eta(t-b) \right].$$

$$713. x(t) = -\cos t. \quad 714. x(t) = (t-1)^2 + e^{1-t}.$$

$$715. x(t) = t^2 + 2t. \quad 716. x(t) = \left( t - 1 - \frac{\pi}{2} \right) \cos t.$$

$$717. x(t) = (t^2 - 2t + 2) e^{1-t}.$$

$$718. x(t) = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \eta(t) - \left[ (t-1) - \frac{1}{2} \sin 2(t-1) \right] \times \\ \times \eta(t-1) + \frac{1}{2} \left[ (t-2) - \frac{1}{2} \sin 2(t-2) \right] \eta(t-2).$$

$$719. x(t) = [b + (1-b) \cos t] \eta(t) + [b - b \cos(t-a)] \eta(t-a).$$

$$720. x(t) = \frac{1}{3} \sin 3t \eta(t) + \frac{1}{9} \left[ (t-1) - \frac{1}{3} \sin 3(t-1) \right] \eta(t-1) - \\ - \frac{2}{9} \left[ (t-2) - \frac{1}{3} \sin 3(t-2) \right] \eta(t-2) + \\ + \frac{1}{9} \left[ (t-3) - \frac{1}{3} \sin 3(t-3) \right] \eta(t-3).$$

$$721. x(t) = \sum_{k=0}^3 (-1)^k [1 - e^{t-ka} + e^{t-ka} (t-ka)] \eta(t-ka).$$

722. Решение. Уравнение движения  $m\ddot{x} = -m\lambda\dot{x} - 2m\mu x$ ;  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ . Операторное уравнение имеет вид

$$p^2 X - p x_0 - v_0 + 2\mu p X - 2\mu x_0 + \lambda X = 0,$$

откуда  $X(p) = \frac{2\mu x_0 + v_0 + px_0}{p^2 + 2\mu p + \lambda}$  или

$$X(p) = \frac{x_0(p + \mu) + \mu x_0 + v_0}{(p + \mu)^2 + (\sqrt{\lambda - \mu^2})^2} = \frac{x_0(p + \mu)}{(p + \mu)^2 + n^2} + \frac{\mu x_0 + v_0}{(p + \mu)^2 + n^2},$$

где  $n^2 = \lambda - \mu^2$ .

Находя оригинал для  $X(p)$ , получим

$$x(t) = \frac{1}{n} e^{-\mu t} [n\dot{x}_0 \cos nt + (\mu x_0 + v_0) \sin nt].$$

723. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -mn^2x + F\eta(t) - F\eta(t - T), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

724. Уравнение движения  $\ddot{x} = an^2 - n^2x$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

725. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -mg - 2km\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

726. Решение. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = F. \quad (1)$$

В нашем случае  $m = 2$ ,  $F = F_0 + at = 4 + at$ , так что уравнение (1) приобретает вид

$$2\ddot{x} = 4 + at, \quad (2)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 10. \quad (3)$$

Операторное уравнение имеет вид  $2(p^2X - 10) = \frac{4}{p} + \frac{a}{p^2}$ , откуда

$$X = \frac{1}{p^2} \left( \frac{a}{2p^2} + \frac{2}{p} + 10 \right).$$

Находя оригинал для  $X(p)$ , получаем

$$x(t) = \frac{a}{12} t^3 + t^2 + 10t.$$

Для определения величины  $a$  имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 450 = \frac{at_0^3}{12} + t_0^2 + 10t_0, \\ 105 = \frac{at_0^2}{4} + 2t_0 + 10, \end{cases}$$

откуда находим, что  $t_0 = 10$ ,  $a = 3$ .

727. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = 4mx - 3m\dot{x}.$$

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = \frac{1}{5} (4e^t + e^{-4t}).$$

728. Уравнение движения  $m\ddot{x} = mg - \lambda\dot{x}$ .

В силу условия задачи  $\lambda = \frac{1}{3} mg$  при  $v = 1$  м/с, так что окончательно получаем уравнение

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{3} gv, \quad v(0) = 0,$$

откуда

$$v(t) = 3 \left( 1 - e^{-\frac{gt}{3}} \right), \quad v_{\max} = 3 \text{ при } t = \infty.$$

729. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right), \quad x_{\max} = \frac{mv_0}{k} \text{ при } t = \infty.$$

730. Решение. Опишем движение нижнего конца цепочки. Выберем начало координат в точке  $O$  (см. рисунок) и направим ось  $Ox$  вниз. Тогда начальные условия будут

$$x(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (\text{цепочка неподвижна}).$$

Если абсцисса конца есть,  $x$ , то движущая сила равна весу части цепочки, свисающей со стола, т. е.

$$F = \frac{mg}{2l} x.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения таково:

$$m\ddot{x} = \frac{mg}{2l} x, \quad x(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

$$x(t) = \frac{l}{2} \left( e^{t\sqrt{\frac{g}{2l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{2l}}} \right).$$

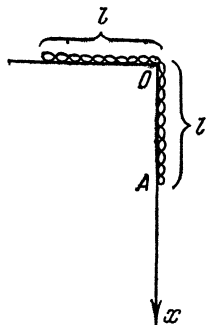


Рис. к ответу 730.

По этому закону движение будет происходить до того момента  $T$ , когда цепочка целиком соскользнет со стола. Мы найдем этот момент, положив  $x = 2l$ :

$$4 = e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}} + e^{-T\sqrt{\frac{g}{2l}}}.$$

Обозначив  $z = e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}}$ , получим уравнение

$$z^2 - 4z + 1 = 0,$$

откуда  $z_1 = 2 - \sqrt{3} < 1$ ,  $z_2 = 2 + \sqrt{3}$ .  $z_1$  отбрасываем, так как ему соответствует отрицательное значение  $T$ . Итак, для определения  $T$

получили уравнение

$$e^T \sqrt{\frac{g}{2l}} = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{откуда} \quad T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \ln(2 + \sqrt{3}).$$

731. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -2mxk^2, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = a \cos(\sqrt{2}kt).$$

732. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -\mu mx, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}.$$

733. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 6, \quad x(t) = 600(1 - e^{-0,01t}).$$

734. Уравнение движения

$$\ddot{x} + 4x = 2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = \frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

735. Уравнение движения  $m\ddot{r} = -mk^2r$  или

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k^2x, & x(0) &= a, & \dot{x}(0) &= 0; \\ \ddot{y} &= -k^2y, & y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Траектория точки — эллипс:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2}{k^2}} = 1.$

736. Уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= k^2x, & x(0) &= a, & \dot{x}(0) &= 0; \\ \ddot{y} &= k^2y, & y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Траектория точки — гипербола:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{v_0^2}{k^2}} = 1.$

737. Д. у.  $L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = E \cos(\omega t + \alpha), \quad Q|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 0.$

738. Д. у.  $L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = E \sin nt, \quad Q|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 0.$

739. Д. у.  $L \frac{dI}{dt} + RI = E \sin(\omega t + \alpha), \quad I|_{t=0} = 0.$

740. Д. у.  $L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E_1 \eta(t) + (E_2 - E_1) \eta(t - T),$   
 $Q|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 0.$

741. Д. у.  $L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E, \quad Q|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 0.$

742.  $x(t) = (C_1 + C_2 t^2) e^{-t}.$  743.  $x(t) = C_1.$

744.  $x(t) = e^{-t}.$  745.  $x(t) \equiv -1.$  746.  $x(t) = e^t.$

$$747. \text{ a) } x(t) = \sum_{s=0}^k (-1)^s 2^s s! C_k^s \frac{t^{2s}}{(2s)!};$$

$$\text{ б) } x(t) = \sum_{s=0}^k (-1)^s 2^s s! C_k^s \frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!}.$$

$$748. x(t) = \frac{1}{2} (e^t - 1) - \ln \frac{1+e^t}{2}.$$

$$749. x(t) = e^{-t} [(t+1) \ln(t+1) - t].$$

$$750. x(t) = (e^t + 2) \ln \frac{e^t + 2}{3} - e^t + 1.$$

$$751. x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1) \ln(e^t + 1).$$

$$752. x(t) = \sin t \left( t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\sqrt{3}} \right) + \\ + \cos t \ln(2 + \cos t) - \ln 3 \cos t.$$

$$753. x(t) = \frac{1}{3} - \frac{9 - \pi \sqrt{3}}{27} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{36} \sin t \ln \left| \frac{\sqrt{3} \sin t - 2}{\sqrt{3} \sin t + 2} \right| - \\ - \frac{\sqrt{3}}{9} \cos t \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \cos t).$$

$$754. x(t) = \cos t \operatorname{arctg}(\cos t) - \frac{\pi}{4} \cos t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin t \cdot \ln \left| \frac{\sin t - \sqrt{2}}{\sin t + \sqrt{2}} \right|.$$

$$755. x(t) = \sin t \operatorname{arctg}(\sin t) + \cos t \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \\ \times \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t} \right| - \ln(3 + 2\sqrt{2}) \right\}.$$

$$756. x(t) = -\operatorname{sh} t + 2 \operatorname{ch} t \left( \operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$757. x(t) = \ln 2 \cos t - \cos t \ln(2 + \sin t) - t \sin t + \\ + \frac{2}{\sqrt{3}} (2 \sin t + 1) \left( \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right).$$

$$758. x(t) = e^t, \quad y(t) = -e^t. \quad 759. x(t) = e^t, \quad y(t) = e^t.$$

$$760. x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}), \quad y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}.$$

$$761. x(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{3t} + 2te^{3t}), \quad y(t) = \frac{1}{4}(5e^t - e^{3t} - 2te^{3t}).$$

$$762. x(t) = e^t(\cos t - 2 \sin t), \quad y(t) = e^t(\cos t + 3 \sin t).$$

$$763. x(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2 \cos 2t + \sin 2t), \quad y(t) = \frac{2}{3} \left( e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right).$$



$$764. x(t) = e^t - \frac{11}{34} e^{4t} - \frac{3}{17} \cos t + \frac{5}{17} \sin t - \frac{1}{2},$$

$$y(t) = -\frac{2}{3} e^t + \frac{22}{51} e^{4t} + \frac{4}{17} \cos t - \frac{1}{17} \sin t.$$

$$765. x(t) = -\frac{1}{15} e^{-2t} + \frac{13}{12} e^{-t} - 2 + \frac{1}{6} e^t + \frac{2}{3} e^{2t} + \frac{3}{20} e^{3t},$$

$$y(t) = \frac{1}{15} e^{-2t} + \frac{13}{12} e^{-t} - 2 - \frac{1}{6} e^t + \frac{2}{3} e^{2t} + \frac{7}{20} e^{3t},$$

$$z(t) = -\frac{13}{12} e^{-t} - \frac{1}{2} e^t + \frac{4}{3} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t}.$$

$$766. x(t) = -e^t, y(t) = 0, z(t) = e^t.$$

$$767. x(t) = \frac{2}{5} (e^{3t} - e^{-2t}), y(t) = \frac{1}{5} (3e^{3t} + 2e^{-2t}),$$

$$z(t) = \frac{1}{5} (3e^{3t} + 2e^{-2t}).$$

$$768. x(t) = \frac{3e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{3e^{at}}{a^2-4}.$$

$$y(t) = -\frac{e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{(a+1)e^{at}}{a^2-4}.$$

$$769. x(t) = 2 - e^{-t}, y(t) = 2 - e^{-t}, z(t) = 2e^{-t} - 2.$$

$$770. x(t) = 6e^t - e^{2t} - 4e^{3t}, y(t) = 3e^t - 2e^{3t}, z(t) = 6e^{3t} + e^{2t} - 6e^t.$$

$$771. x(t) = -\frac{1}{15t^2} + \frac{13}{12t} - 2 + \frac{1}{6}t + \frac{2}{3}t^2 + \frac{3}{20}t^3,$$

$$y(t) = \frac{1}{15t^2} + \frac{13}{12t} - 2 - \frac{1}{6}t + \frac{2}{3}t^2 + \frac{7}{20}t^3,$$

$$z(t) = -\frac{13}{12t} - \frac{1}{2}t + \frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{4}t^3.$$

$$772. x_m(t) = e^{-ct} \frac{(ct)^m}{m!} \quad (m=0, 1, 2, \dots, n).$$

$$773. x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{3}{10} e^{-6t/11}, y(t) = \frac{1}{5} (e^{-t} - e^{-6t/11}).$$

$$774. x(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t, y(t) = \frac{5}{4}t^2 - \frac{1}{4}, z(t) = \frac{5}{4}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{5}{12}.$$

$$775. x(t) = \frac{28}{9} e^{3t} - e^{-t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}, y(t) = \frac{28}{9} e^{3t} + e^{-t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}.$$

776. Уравнения движения электрона

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{eH}{c} \dot{y}, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \\ m\ddot{y} = \frac{eH}{c} \dot{x}, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{v_0 mc}{eH} \sin \frac{eHt}{mc}, \quad y(t) = \frac{mcv_0}{eH} \left( 1 - \cos \frac{eHt}{mc} \right).$$

Траектория электрона  $x^2 + y^2 - \frac{2mcv_0}{eH} y = 0$ .

777. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, & x(0) = 0, & \dot{x}(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \\ m\ddot{y} = -gm, & y(0) = 0, & \dot{y}(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Наибольшая высота  $H = \frac{v_0^2}{4g}$ ; точка падения  $x = \frac{v_0^2}{g}$ .

778. Пусть электрон вылетает из начала координат. Выберем ось  $Ox$  параллельно направлению магнитного поля  $H$ , а ось  $Oy$  выберем так, чтобы вектор  $\mathbf{v}_0$  лежал в координатной плоскости  $xOy$ .

Тогда уравнения движения будут

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, & x(0) = 0, & \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \\ m\ddot{y} = -\frac{eH}{c} \dot{z}, & y(0) = 0, & \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha, \\ m\ddot{z} = \frac{eH}{c} \dot{y}, & z(0) = 0, & \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

Траектория электрона

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - \frac{2v_0 c m \sin \alpha}{eH} z = 0, \\ x = tv_0 \cos \alpha. \end{cases}$$

779. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -km\dot{x}, & x(0) = 0, & \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \\ m\ddot{y} = -mg - km\dot{y}, & y(0) = 0, & \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha, \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}), \quad y(t) = \frac{v_0 k \sin \alpha + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}.$$

780. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{eH}{c} \dot{y} - km\dot{x}, & x(0) = 0, & \dot{x}(0) = u, \\ m\ddot{y} = \frac{eH}{c} \dot{x} - km\dot{y}, & y(0) = 0, & \dot{y}(0) = 0, \\ m\ddot{z} = -kmz, & z(0) = 0, & \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

781. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2\lambda\dot{x} - \mu^2 x, & x(0) = a, & \dot{x}(0) = 0, \\ m\ddot{y} = -2\lambda\dot{y} - \mu^2 y, & y(0) = 0, & \dot{y}(0) = v_0. \end{cases}$$

782. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, & x(0) = 0, & \dot{x}(0) = v_0, \\ m\ddot{y} = -mk^2 \dot{y}, & y(0) = a, & \dot{y}(0) = 0, \\ x(t) = v_0 t, & y(t) = a \cos kt. \end{cases}$$

Траектория точки  $y = a \cos \left( \frac{kx}{v_0} \right)$ .

$$783. \varphi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x + \frac{1}{2} \sin x.$$

$$784. \varphi(x) = \frac{1}{3} \left( e^x - e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \sqrt{3} e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

$$785. \varphi(x) = x + \frac{1}{6} x^3.$$

$$786. \varphi(x) = \frac{2}{5} e^{2x} + \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

$$787. \varphi(x) = 2 + x - e^{\frac{x}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

$$788. \varphi(x) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{8} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{1}{16} e^{2x} - \frac{1}{12} x^3.$$

$$789. \varphi(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{3} e^{-x/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

$$790. \varphi(x) = \frac{1}{3} \left( e^x - e^{-x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \sqrt{2} x \right). \quad 791. \varphi(x) = x e^x.$$

$$792. \varphi(x) = e^x. \quad 793. \varphi(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos \sqrt{3} x.$$

$$794. \varphi(x) = \operatorname{ch} x - x e^{-x}. \quad 795. \varphi(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} x + \cos x).$$

$$796. \varphi(x) = x - \frac{1}{6} x^3. \quad 797. \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{5}}{2} x.$$

$$798. \varphi(x) = 1 - x.$$

$$799. \varphi(x) = J_0(x), \text{ так что } \int_0^x J_0(x-t) J_0(t) dt = \sin x.$$

$$800. \varphi(x) \equiv 1 \quad 801. \varphi(x) = e^{-x}.$$

$$802. \varphi(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3. \quad 803. \varphi(x) = 2x e^x - x^2 e^x.$$

$$804. \varphi(x) \equiv 1. \quad 805. \varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

$$806. \varphi_1(x) = e^{-x} (1-x), \quad \varphi_2(x) = \frac{8}{9} e^{2x} + \frac{1}{3} x e^{-x} - \frac{8}{9} e^{-x}.$$

$$807. \varphi_1(x) = e^{2x}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2x}.$$

$$808. \varphi_1(x) = \frac{1}{3} e^{3/2 x} \left( \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) - \frac{1}{3},$$

$$\varphi_2(x) = e^{3/2 x} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

809.  $\varphi_1(x) = (x+2) \sin x + (2x+1) \cos x.$

$\varphi_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cos x - \left(\frac{1}{2} + x\right) \sin x.$

810.  $\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \sqrt{3} x - \frac{3}{2} \operatorname{sh} x, \quad \varphi_2(x) = \cos \sqrt{3} x - 3 \operatorname{ch} x.$

811.  $\varphi_1(x) = 2(1-x)e^{-x}, \quad \varphi_2(x) = (1-x)e^{-x}.$

812.  $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!} \eta(t-k).$

813.  $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (t-k)^{k+3}}{(k+3)!} \eta(t-k).$

814.  $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} \eta(t-k).$

815.  $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t-2k)^{k+3}(k+1)}{(k+3)!} \eta(t-2k).$

816.  $x(t) = \left(-t + \frac{1}{2} t^2\right) \eta(t) +$   
 $+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(t-k+2)^{k-1}}{k!} (t-3k+2) \eta(t-k+2).$

817.  $x(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right) \eta(t) +$   
 $+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} \eta(t-k).$

818.  $x(t) = \cos t.$

819.  $u(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz\right).$

820.  $u(x, t) = u_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz.$

821.  $u(x, t) =$   
 $= ae^{-x} \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \cos\left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) - \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \sin x \sqrt{\frac{\rho}{k}} \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \omega^2}.$

$$822. u(x, t) = a \left[ e^{-x} \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \sin \left( \omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \sin x \sqrt{\frac{\rho}{k}} \frac{d\rho}{\rho^2 + \omega^2} \right].$$

$$823. u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

$$824. \text{Д. у. } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = u_1,$$

$$u(x, t) = u_1 +$$

$$+ \frac{4(u_1 - u_0)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-a^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} t} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

$$825. \text{Д. у. } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = hu|_{x=0}, \quad h = \text{const},$$

$$u(x, t) = u_0 \left[ \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} + e^{hx + h^2 a^2 t} \operatorname{Erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t} \right) \right].$$

При решении задачи воспользоваться теоремой Эфроса (см. § 14).

$$826. \text{Д. у. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{F}{E},$$

$$u(x, t) = \frac{Fx}{E} - \frac{8Fl}{\pi^2 E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^2}.$$

$$827. \text{Д. у. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{g}{c^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0,$$

$$u(x, t) = \frac{gx(2l-x)}{2c^2} -$$

$$- \frac{16gl^2}{\pi^3 c^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \frac{(2k+1)(x-l)\pi}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^3}.$$

$$828. u(x, t) = -\frac{bx}{12} (x^3 - 2lx^2 + l^3) + \\ + \frac{8bl^4}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi t}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^5}.$$

$$829. \text{Д. у. } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^3}.$$

$$830. \frac{1}{1-e^{-p}}. \quad 831. \frac{e^{-p}}{(1-e^{-p})^2}. \quad 832. \frac{1}{1-e^{\alpha-p}}. \quad 833. \frac{e^p}{e^p-\alpha}.$$

$$834. \frac{e^p(e^p - \cos 1)}{e^{2p} + 2e^p \cos 1 + 1}. \quad 835. \frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}.$$

$$836. \frac{e^p \operatorname{sh} 1}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} 1 + 1}. \quad 837. \frac{e^p}{e^p - e} - \frac{2e^p}{e^p - \sqrt{e}}.$$

$$838. \frac{1}{2} \frac{e^p}{e^p - 1} + \frac{1}{2} \frac{e^p(e^p - \cos 2)}{e^{2p} - 2e^p \cos 2 + 1}. \quad 839. \frac{e^{(1-k)p}}{e^p - 1}.$$

$$840. \left( \frac{e^p}{e^p - e^3} - 1 - e^{\alpha-p} - e^{2\alpha-2p} \right) e^{3p}.$$

$$841. \frac{e^p(2 \operatorname{ch} 2 - e^p) \operatorname{sh} 2}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} 2 + 1}. \quad 842. \frac{e^p(4e^{2p} - 3e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}.$$

$$843. \frac{e^{p-1} \sin 2}{e^{2p} - 2e^{p-1} \cos 2 + e^{-2}}. \quad 844. \frac{e^{p+2}(e^p + e^2)}{(e^p - e^2)^3}.$$

$$845. \frac{e^p(e^p - e^3 \operatorname{ch} 1)}{e^{2p} - 2e^{p+3} \operatorname{ch} 1 + e^6}. \quad 846. \frac{e^{p+1}(e^p + e)}{(e^p - e)^3}.$$

$$847. \frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}. \quad 848. \frac{(e^{2p} - 1)e^p}{(e^{2p} + 1)^2}. \quad 849. \ln a + \ln \frac{e^p - 1}{e^p - a}.$$

$$850. \alpha + \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{e^p - \cos \alpha}. \quad 851. \ln \frac{\sqrt{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}}{e^p - 1}.$$

$$852. \frac{1}{e^p - 1} - \ln \sqrt{\frac{e^p - e^{-1}}{e^p - e}}. \quad 853. \frac{e^p [(1 + e^{2p}) \cos \alpha - 2e^p]}{(e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1)^2}.$$

$$854. \frac{e^p(e^{4p} + 2e^{3p} \operatorname{ch} \alpha - 6e^{2p} + 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1) \operatorname{sh} \alpha}{(e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1)^3}.$$

$$855. \frac{e^p(2e^{3p} - 5e^{2p} \operatorname{ch} \alpha + 4e^p \operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{ch} \alpha)}{(e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1)^2}.$$

$$856. \varepsilon - \varepsilon_0 + \ln \frac{e^p - e^{\varepsilon_0}}{e^p - e^\varepsilon}. \quad 857. \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} 1 + 1}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \varepsilon + 1}.$$

858.  $\varepsilon + \operatorname{arctg} \frac{\sin \varepsilon}{e^p - \cos \varepsilon}$ .
859.  $\varepsilon - 1 + \frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\varepsilon}{e^p - \cos 2\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{\sin 2}{e^p - \cos 2} \right)$ . 860.  $\frac{1 - e^n}{1 - e}$ .
861.  $\frac{n(n+1)}{2}$ . 862.  $\frac{n}{1-e} - \frac{1-e^n}{(1-e)^2}$ . 863.  $\frac{1 - e^{2(n-1)}}{1 - e^2}$ .
864.  $\Delta f(n) = 3$ ,  $\Delta^k f(n) = 0$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ).
865.  $\Delta^k f(n) = (e^1 - e^2)^k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).
866.  $\Delta f(n) = 2n$ ,  $\Delta^2 f(n) = 2$ ,  $\Delta^k f(n) = 0$  ( $k = 3, 4, \dots$ ).
867.  $\frac{e^p(e^{2p} + 4e^p + 1)}{(e^p - 1)^4}$ . 868.  $\frac{e^p}{(e^p - 1)^3}$ . 869.  $\frac{2e^{(1-k)p}}{(e^p - 1)^3}$ .
870.  $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ . 871.  $\frac{(n-1) \sin \frac{2n-1}{2} \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{n-1}{2} \alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ .
872.  $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ .
873.  $\frac{(1 - e \cos \alpha)(1 - e^n \cos n\alpha) + e^{n+1} \sin \alpha \sin n\alpha}{e^2 - 2e \cos \alpha + 1}$ .
874.  $n3^{n-1}$ . 875.  $\frac{5^n - 3^n}{3}$ . 876.  $\sin \frac{n\pi}{2}$ .
877.  $\frac{1 + (-1)^n}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{n+1}{2} \pi$ .
878.  $a^{n-1} 2^{n/2} \sin \frac{3n\pi}{4}$ . 879.  $\frac{n(n-1)}{2} e^{n-2}$ .
880. Второго порядка. 881. Нулевого порядка.
882. Первого порядка. 883. Третьего порядка.
884.  $2^n$ . 885.  $(-1)^n (1-n)$ . 886.  $2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$ .
887.  $1 - 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$ . 888.  $\sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{(n-1)\pi}{4}$ .
889.  $(-1)^n \frac{n^2 - n}{2}$ . 890.  $\frac{3n - 1 + (-2)^n}{9}$ .
891.  $\frac{4^{n-1} + 15 \cdot 2^{n-3} - 7(-2)^{n-3}}{3}$ . 892.  $\frac{1 - (-1)^n}{2}$ .
893.  $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \cdot 3^{n-3}$ . 894.  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot (-1)^{n-1}$ .
895.  $\frac{n^5}{60} - \frac{n^4}{8} + \frac{n^3}{3} - \frac{3n^2}{8} + \frac{3n}{20}$ .
896. Асимптотически устойчиво. 897. Асимптотически устойчиво.
898. Неустойчиво. 899. Неустойчиво.
900. Устойчиво, но не асимптотически.
901. Асимптотически устойчиво. 902. Неустойчиво.
903. Неустойчивый фокус. 904. Центр.
905. Устойчивый фокус. 906. Седло.
907. Неустойчивый узел. 908. Неустойчивый узел.
909. Устойчивый узел. 910. Точка (0, 0, 0) устойчива.
911. Точка (0, 0, 0) неустойчива.

912. Асимптотически устойчиво при  $\alpha < 0$ . Во всех остальных случаях неустойчиво.

913. Асимптотически устойчиво при  $\alpha < 0$  и  $\alpha > 1$ ; устойчиво, но не асимптотически при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ ; неустойчиво при  $0 < \alpha < 1$ .

914. Неустойчиво при всех  $\alpha$ . 915.  $\alpha \leq 0$ . 916.  $\alpha \leq -1/2$ .

917. Асимптотически устойчиво при  $\alpha\beta < 1$ ; устойчиво, но не асимптотически при  $\alpha\beta = 1$ .

918. Асимптотически устойчиво при  $\beta < \alpha^2$  ( $\alpha < 0$ ); устойчиво, но не асимптотически при: 1)  $\alpha = 0$  ( $\beta < 0$ ); 2)  $\beta = \alpha^2$  ( $\alpha < 0$ ).

919. Асимптотически устойчиво при  $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha > 0$  ( $\alpha < 1$ ); устойчиво, но не асимптотически при: 1)  $\alpha = 1$  ( $|\beta| > 1$ ); 2)  $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha = 0$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ).

920. Неустойчиво при всех значениях  $\alpha$  и  $\beta$ .

921. Асимптотически устойчиво при  $\alpha^2 + \beta^2 - \beta < 0$ ; устойчиво, но не асимптотически при  $\alpha^2 + \beta^2 - \beta = 0$  ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ).

922. Устойчиво, но не асимптотически при  $\beta + 2\alpha + 1 = 0$ ; асимптотически устойчиво при всех остальных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ .

923. Асимптотически устойчиво. 924. Асимптотически устойчиво.

925. Асимптотически устойчиво. 926. Устойчиво.

927. Асимптотически устойчиво. 928. Асимптотически устойчиво.

929. Асимптотически устойчиво. 930. Неустойчиво.

931. Неустойчиво. 932. Асимптотически устойчиво.

933. Асимптотически устойчиво. 934. Асимптотически устойчиво.

935. Неустойчива. 936. Устойчива. 937. Неустойчива.

938. Устойчива. 939. Неустойчива. 940. Неустойчива.

941. Асимптотически устойчива. 942. Устойчива.

943. Исследование по первому приближению невозможно. С помощью функции Ляпунова устанавливаем, что точка  $(0, 0)$  асимптотически устойчива. 944. Точка покоя устойчива. 945. Нулевое решение системы первого приближения неустойчиво, а для полной системы оно асимптотически устойчиво.

946. Если  $a > 0, b > 0$ , то условие устойчивости имеет вид  $\cos T > 0$ , где  $T = (-1)^k x_0 + k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $x_0 = \arcsin \frac{L}{b}$  (см. [2]).

954. Устойчиво. 955. Неустойчиво. 956. Устойчиво.

957. Неустойчиво. 958. При  $\alpha > 1/2$ .

959. Решение неустойчиво при любом  $\alpha$ . 960. При  $\alpha > 13/6$ .

961. При любых  $(\alpha, \beta)$  из области  $G$  (см. рис.).

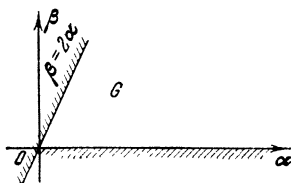


Рис. к ответу 961.

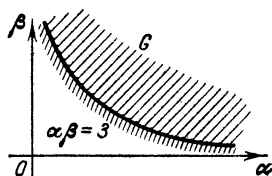


Рис. к ответу 962.

962. При любых  $(\alpha, \beta)$  из области  $G$ :  $\alpha\beta > 3, \alpha > 0, \beta > 0$  (см. рис.).

963. Решение неустойчиво при любых  $(\alpha, \beta)$ . 964.  $p > 0, q > 2$ .



965. Все корни в левой полуплоскости; решение устойчиво (см. рис.).

966. Два корня в левой полуплоскости, два корня в правой; решение неустойчиво (см. рис.).

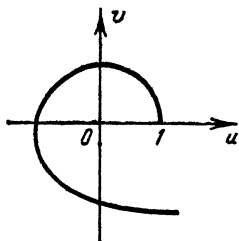


Рис. к ответу 965.

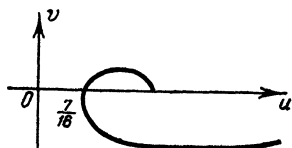


Рис. к ответу 966.

967. Устойчиво. 968. Устойчиво.

969. Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво (см. рис.).

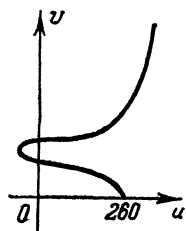


Рис. к ответу 969.

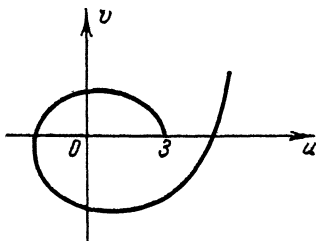


Рис. к ответу 970.

970. Устойчиво (см. рис.). 971. Устойчиво. 972. Устойчиво.

973. Устойчиво. 974. Решение устойчиво. 975. Устойчиво.

976. Устойчиво. 977. Устойчиво. 978. Устойчиво.

979. Устойчиво (см. рис.). 980. Устойчиво.

981. Чисто мнимые корни; решение неустойчиво (см. рис.).

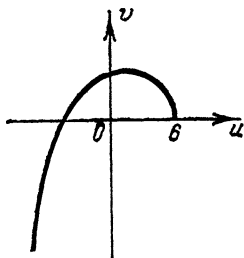


Рис. к ответу 979.

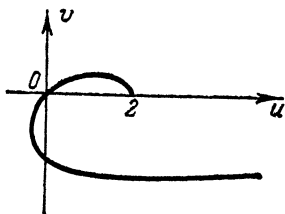


Рис. к ответу 981.

982. Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво.

983. Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво (см. рис.).

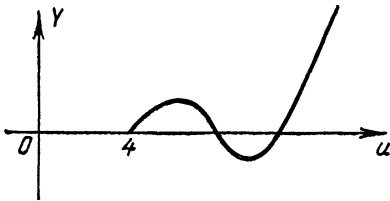


Рис. к ответу 983.

984. Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво.

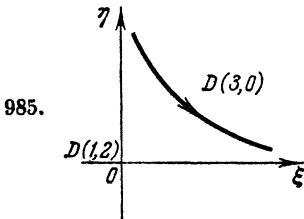


Рис. к ответу 985.

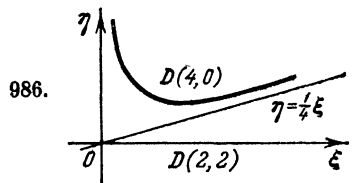


Рис. к ответу 986.

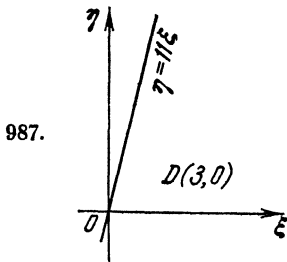


Рис. к ответу 987.

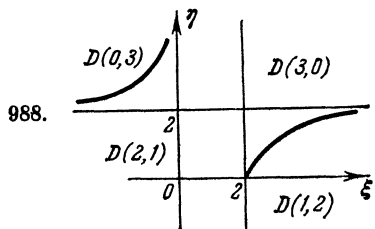


Рис. к ответу 988.

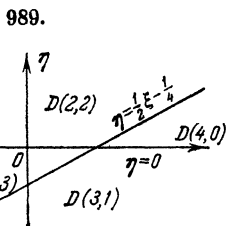


Рис. к ответу 989.

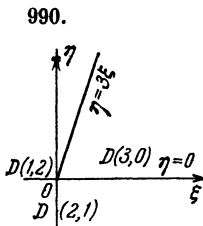


Рис. к ответу 990.

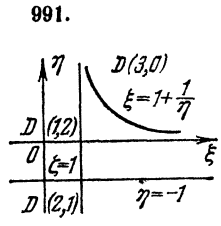


Рис. к ответу 991.

992.

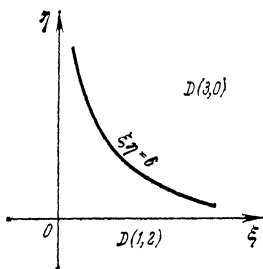


Рис. к ответу 992.

993.

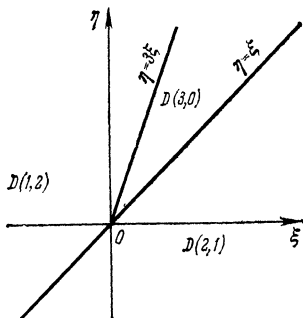


Рис. к ответу 993.

994.

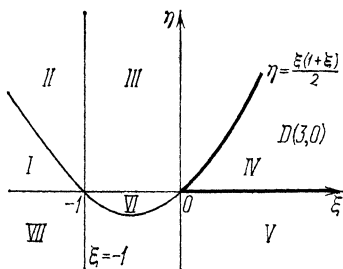


Рис. к ответу 994.

995.

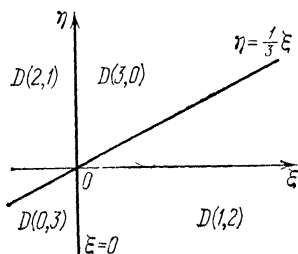


Рис. к ответу 995.

996.

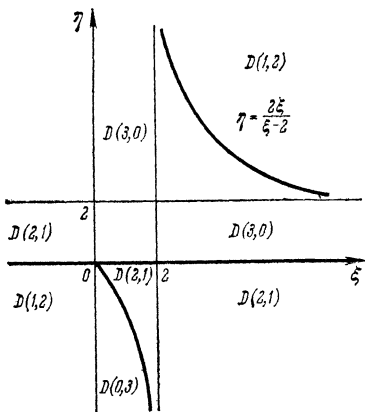


Рис. к ответу 996.

997.

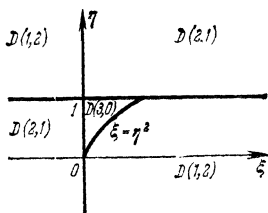


Рис. к ответу 997.

$$998. f(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \left(-\frac{4}{5}\right)^n. \quad 999. f(n) = (-1)^n (4n^2 - 7n + 1).$$

$$1000. f(n) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[ C_1 \cos\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) + C_2 \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) \right].$$

$$1001. f(n) = 2^n \left( C_1 + C_2 \cos \frac{2n\pi}{3} + C_3 \sin \frac{2n\pi}{3} \right).$$

$$1002. f(n) = (-1)^n (C_1 + C_2 n) + 2^{n/2} \left( C_3 \cos \frac{n\pi}{4} + C_4 \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

$$1003. f(n) = C_1 (1 - \sqrt{2})^n + C_2 (1 + \sqrt{2})^n - \frac{n}{2}.$$

$$1004. f(n) = 2 \cdot 3^n + (-1)^n (8n - 2).$$

$$1005. f(n) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{\sin 2(n-1)}{2 \cos 2}.$$

$$1006. f(n) = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \frac{e^n}{(e-1)^3}.$$

$$1007. f(n) = 2^n \left( \frac{1}{16} + C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3} \right) + C_3 (-2)^n.$$

1008. Асимптотически устойчиво. 1009. Устойчиво, но не асимптотически.

1010. Асимптотически устойчиво. 1011. Неустойчиво.

$$1012. a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0, \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0, \quad 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0, \quad 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0, \quad a_0^2 - a_3^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3 > 0.$$

$$1013. 1 - q > 0, \quad 1 + p + q > 0, \quad 1 - p + q > 0.$$

$$1014. -1 < p < 1. \quad 1015. |a| > b.$$

1016. Асимптотически устойчиво. 1017. Неустойчиво.

1018. Асимптотически устойчиво. 1019. Неустойчиво.

1020. Неустойчиво. 1021. Неустойчиво. 1022. Неустойчиво.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОРИГИНАЛЫ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯ

| Оригинал $f(t)$                               | Изображение $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$  |
|---|---|
| 1. 1  | $\frac{1}{p}$   |
| 2. $t^n$ ( $n = 1, 2, \dots$ )                | $\frac{n!}{p^{n+1}}$                                  |
| 3. $t^\alpha$ ( $\alpha > -1$ )               | $\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}$             |
| 4. $e^{\lambda t}$ ( $\lambda = a + bi$ )     | $\frac{1}{p - \lambda}$                               |
| 5. $t^n e^{\lambda t}$                        | $\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$                      |
| 6. $t^\alpha e^{\lambda t}$ ( $\alpha > -1$ ) | $\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(p - \lambda)^{\alpha+1}}$ |
| 7. $\sin \omega t$ ( $\omega > 0$ )           | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$                       |
| 8. $\cos \omega t$                            | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$                            |
| 9. $\text{sh } \omega t$                      | $\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$                       |
| 10. $\text{ch } \omega t$                     | $\frac{p}{p^2 - \omega^2}$                            |
| 11. $e^{\lambda t} \sin \omega t$             | $\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$           |

Продолжение

| Оригинал $f(t)$   | Изображение $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$             |
|---|--|
| 12. $e^{\lambda t} \cos \omega t$   | $\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$                 |
| 13. $e^{\lambda t} \text{sh } \omega t$   | $\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$                      |
| 14. $e^{\lambda t} \text{ch } \omega t$   | $\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$                 |
| 15. $t \sin \omega t$   | $\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$                            |
| 16. $t \cos \omega t$   | $\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$                      |
| 17. $t \text{ sh } \omega t$  | $\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$                            |
| 18. $t \text{ ch } \omega t$  | $\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$                      |
| 19. $\sin(t - \tau) \quad (\tau > 0)$   | $\frac{e^{-\tau p}}{p^2 + 1}$                                    |
| 20. $\cos(t - \tau)$  | $\frac{pe^{-\tau p}}{p^2 + 1}$                                   |
| 21. $t^n \sin \omega t$   | $\frac{\text{Im}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$ |
| 22. $t^n \cos \omega t$   | $\frac{\text{Re}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$ |
| 23. $J_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots)$  | $\frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$                  |
| 24. $\text{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} dx$ | $\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$                                |
| 25. $\text{Si } t = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$   | $\frac{\text{arctg } p}{p}$                                      |

Продолжение

| Оригинал $f(t)$  | Изображение $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$                                |
|--|---|
| 26. $\text{Ci } t = - \int_t^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ | $\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$  |
| 27. $\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$                            | $\ln \frac{p-a}{p-b}$   |
| 28. $\frac{I_n(\alpha t)}{t} \quad (\alpha > 0)$           | $\frac{1}{n\alpha^n} (\sqrt{p^2 + \alpha^2} - p)^n$                                 |
| 29. $\ln t$  | $\frac{1}{p} \left( \ln \frac{1}{p} - \gamma \right), \quad \gamma = 0,57722 \dots$ |

## ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1968.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
3. Волковьский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. — Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1970.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. Евграфов М. А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1965.
6. Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., Бежанов К. А. Сборник задач по теории аналитических функций. — М.: Наука, 1969.
7. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. — М.: ИЛ, 1948.
8. Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Устойчивость движения (задачи и упражнения). — М.: Наука, 1964.
9. Кручкович Г. И., Мордасова Г. М., Подольский В. А., Римский-Корсаков Б. С., Сулейманова Х. Р., Чегис И. А. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. — М.: Высшая школа, 1970.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
11. Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. — М.: Просвещение, 1977.
12. Мышкис А. Д. Математика для вузов (специальные курсы). — М.: Наука, 1971.
13. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977.
14. Пчелин Б. К. Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. — М.: Высшая школа, 1973.
15. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. — М.: Наука, 1980.
16. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1979.
17. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1976.
18. Чинаев П. И. Высшая математика (специальные главы). — Киев: Вища школа, 1977.
19. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965.



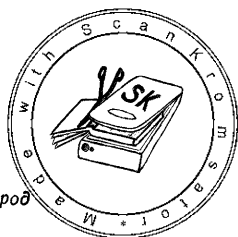
*Михаил Леонтьевич  
Краснов*

*Александр Иванович  
Киселев*

*Григорий Иванович  
Макаренко*

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО,  
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ,  
ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

(Серия: Избранные главы  
высшей математики для инженеров  
и студентов вузов)



Редактор *И. Е. Морозова.*  
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*  
Корректор *Т. С. Вайсберг*

ИБ № 11792

Сдано в набор 19.03.81 Подписано к печати 12.08.81.  
Формат 84×108<sup>1/32</sup> Бумага тип. № 3. Условн. печ.  
л. 15,96. Уч.-изд. л. 18 51, Тираж 59 000 экз.  
Заказ № 767. Цена 75 коп,

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической  
литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового  
Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный  
Двор» имени А. М. Горького Союзполиграф-  
прома при Государственном комитете СССР по  
делам издательства, полиграфии и книжной тор-  
говли. 197136, Ленинград, П-136, Чкалов-  
ский пр., 15.

Отпечатано в тип. № 4 изд-ва «Наука», Новоси-  
бирск, 77, Станиславского, 25,